Zu haben in der Buchhandlg.
von
Johann Palm,
in München,
Theatinerstraße neben dem
goldeneu Hirsch.

Ma.
38a

Leitfaden
zum Unterrichte
in der
elementaren Mathematik,
für seine Schüler entworfen

von

Dr. Georg Mayer,
Professor am alten Gymnasium in München.

II. Abtheilung,

enthaltend

Stereometrie und Trigonometrie.

Mit einer Steindrucktafel.

München, 1831.
Jos. Lindauersche Buchhandlung.
(C. T. F. Sauer).

KÖNIGL. BAYER. BIBLIOTHEK BAMBERG

Vorrede.

Gegenwärtige zweite Abtheilung meines mathematischen Lehrbuches hat mit der ersten gleichen Zweck, nemlich meinen Schülern als Leitfaden beim Unterrichte zu dienen. In der Stereometrie, der die Lehre von der Lage der Ebenen als Einleitung vorausgeschickt ist, habe ich, wie in der ebenen Geometrie, die Synthesis beibehalten; aber bei der Behandlung der ebenen und sphärischen Trigonometrie die Analysis vorgezogen, die, wenn auch in der Anschaulichkeit der Synthesis nachstehend, doch rücksichtlich der Einfachheit und Kürze wesentliche Vorzüge hat; zudem kann ja beim mündlichen Unterrichte die Construktion der analytisch abgeleiteten Sätze vorgenommen werden.

Die über vorkommende Sätze gegebenen Aufgaben habe ich mit aller Sorgfalt berechnet; wenn aber dessen-

ungeachtet sich Rechnungs- und Druckfehler eingeschlichen haben, so werden jene nachsichtig seyn, die selbst solche Aufgaben zu machen Gelegenheit oder Lust gehabt haben. Die Berechnung der Aufgaben aus mathematischer Geographie durch Sphärik wurde durch Ammons Lehrbuch der mathematischen Geographie veranlaßt, das ich beim Unterrichte in diesem Gegenstande benütze, und dem, gemäß seiner systematischen Darstellung und geschickten Auswahl des für Gymnasialschüler Brauchbaren und Verständlichen, eine günstige Aufnahme in Schulen nicht fehlen wird.

München.

Der Verfasser.

C. Stereometrie.

I.

Lage gerader Linien gegen Ebenen, und der Ebenen gegen einander.

§. 1.

Grundsätze. 1. Durch drei, nicht in gerader Linie liegende, Punkte ist eine Ebene bestimmt.

2. Eine gerade Linie liegt ganz in einer Ebene, wenn zwei Punkte von ihr in der Ebene liegen.

3. Wenn sich zwei Ebenen schneiden, so durchschneiden sie sich in einer geraden Linie, (Durchschnittslinie).

Zus. Eine gerade Linie kann eine Ebene nur in einem Punkte schneiden, (Durchschnittspunkt).

§. 2.

Erklärung. Eine gerade Linie steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf allen Linien, die in der Ebene durch den Durchschnittspunkt gezogen werden können, senkrecht steht; außerdem schief.

Zus. 1. Eine gerade Linie kann auf zwei sich schneidenden Ebenen nicht zugleich senkrecht stehen.

Zus. 2. Eine gerade Linie kann durch einen Punkt nicht auf zwei Ebenen zugleich senkrecht stehen.

§. 3.

Lehrs. Eine gerade CD, welche auf zwei in der Ebene AB (Fig. 1.) liegenden Linien DE, DF senkrecht steht, steht auf der Ebene selbst senkrecht.

Beweis. Man verlängere FD bis G, so daß DG = DF; eben so nehme man auch DH in der Verlängerung ED, und dieser gleich; ziehe HF, EG. Nun ziehe man die beliebige DM zwischen den Schenkeln DF, DH des Winkels FDH, und verlängere sie, bis sie die GE in N schneidet; ferner ziehe man CF, CM, CH, CE, CN, CG, so ist

$\triangle$ FDH $\cong$ $\triangle$ EDG; daraus folgt
$\triangle$ DHM $\cong$ $\triangle$ DEN; eben so ist
$\triangle$ CDF $\cong$ $\triangle$ CDG, und
$\triangle$ CDH $\cong$ $\triangle$ CDE. Es ist auch
$\triangle$ CHF $\cong$ $\triangle$ CEG, und
$\triangle$ CHM $\cong$ $\triangle$ CEN; aus diesem ergibt sich
$\triangle$ CDM $\cong$ $\triangle$ CDN; daher
W. CDM = W. CDN = R.

Mithin steht CD auf MN, also auch auf jeder durch D in der Ebene AB gezogenen geraden Linie, mithin auf der Ebene selbst senkrecht. (§. 2. Erklärung.)

Zus. 1. Drei gerade Linien, die in einem Punkte zusammenstoßen, durch welchen eine vierte auf ihnen senkrecht steht, liegen in einer Ebene. (§. 2. Zus. 1.)

Zus. 2. Durch einen Punkt einer Ebene gibt es auf sie nur eine senkrechte.

§. 4.

Lehrsatz. Wenn zwei gerade FE, GD (Fig. 2.) auf einer Ebene AB senkrecht stehen, so sind sie parallel.

Bew. Man ziehe ED, und ziehe auf sie in der Ebene AB durch E die senkrecht CE = GD; ziehe ferner GE, GC, DC so ist

$\triangle$ GDE $\cong$ $\triangle$ CED, und
$\triangle$ GEC $\cong$ $\triangle$ GDC; daher auch
W. GEC = W. GDC = R.

Also steht CE senkrecht auf FE, GE und DE; mithin liegen diese drei Linien in einer Ebene (§. 3. Zus. 1.), in welcher auch GD liegt; daher liegen FE und GD in einer Ebene, und da FED + GDE = 2R, so ist FE ⋕ GD.

Zus. Wenn von zwei Parallelen die eine auf einer Ebene senkrecht steht, so steht auch die andere auf ihr senkrecht.

§. 5.

Aufgaben. 1. Aus dem Punkte C (Fig. 3.) außerhalb der Ebene AB auf sie ein Perpendikel ziehen.

Auflösung. Man nehme in der Ebene AB die beliebige gerade FG und errichte auf dieser den Perpendikel CE, und in der Ebene AB das Perpendikel ED; ziehe aus C auf ED die senkrechte CD, so steht diese auf der Ebene AB selbst senkrecht.

Beweis. Durch D ziehe man in der Ebene AB die LM ⋕ FG, so steht FG senkrecht auf ED und EC (ex constr.); also auf der Ebene CED; mithin auch ihre Parallele LM; daher ist CDM = R = CDE. Folglich steht CD auf der Ebene AB senkrecht. (§. 3. Lehrs.).

2. Durch den Punkt P (Fig. 3.) der Ebene AB auf sie ein Perpendikel ziehen.

Auflösung. Man nehme außer der Ebene den beliebigen Punkt C, und ziehe von diesem auf die Ebene AB ein Perpendikel (Auf. 1.); in der Ebene PDC ziehe man durch P die PH ⋕ CD, so steht PH senkrecht auf der Ebene AB. (§. 4. Zus.)

Zus. 1. Von einem Punkte außer einer Ebene, und durch einen Punkt einer Ebene gibt es auf sie nur ein Perpendikel.

Zus. 2. Von einem Punkte außer einer Ebene ist das Perpendikel die kürzeste Linie auf sie.

§. 6.

Erklärungen. Eine gerade Linie ist einer Ebene parallel, wenn sie diese bei jeder möglichen Verlängerung nie schneidet.

Zwei sich nie schneidende Ebenen sind **parallel**.

Wenn (Fig. 3.) CE schief auf der Ebene AB steht; CD auf dieser aber senkrecht, so ist, wenn man ED zieht, CED der **Neigungswinkel** der geraden Linie gegen die Ebene AB.

Ist (Fig. 1.) GE die Durchschnittslinie der sich schneidenden Ebenen CGE, DGE, und nimmt man in der GE den beliebigen Punkt N, und zieht durch N auf GE in beiden Ebenen die Perpendikel CN, DN, so ist CND der **Neigungswinkel** beider Ebenen. In diesem Falle heißt die Ebene CDN die **Ebene des Neigungswinkels**.

Zus. 1. Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter, so stehen diese aufeinander senkrecht; eben so steht jede Ebene, die man durch eine auf einer Ebene senkrechte Linie legt, selbst auf dieser Ebene senkrecht.

Zus. 2. Die Durchschnittslinie zweier Ebenen steht auf der Ebene des Neigungswinkels senkrecht, so wie die Ebene des Neigungswinkels auf den sich schneidenden Ebenen senkrecht steht.

Zus. 3. Wenn eine gerade auf zwei Ebenen zugleich senkrecht steht, so sind diese parallel. (§. 2. Zus. 1.).

Zus. 4. Die Durchschnittslinien zweier Parallelebenen mit einer dritten sind parallel.

§. 7.

Lehrs. Winkel in verschiedenen Ebenen sind gleich, wenn ihre Schenkel parallel sind, d. i., wenn (Fig. 4.) AC $\#$ EB und DC $\#$ FB, so ist W.ACD = W.EBF.

Beweis. Man mache CA = BE, CD = BF, und ziehe AD, EF, CB, AE, DF, so ist: CA $\overset{=}{\#}$ BE, CD $\overset{=}{\#}$ BF (ex constr.); mithin auch CB $\overset{=}{\#}$ AE $\overset{=}{\#}$ DF; also AD = EF; und da CA = BE, CD = BF, so ist $\triangle$ ACD $\cong$ $\triangle$ EBF; daher auch W. ACD = W. EBF.

§. 8.

Aufgabe. Durch einen Punkt A (Fig 5.) mit der Ebene MQ eine parallele Ebene zu legen.

Auflösung. Aus A errichte man auf die Ebene MQ das Perpendikel AE, und ziehe in der nemlichen Ebene EF, EG; durch A ziehe man in der Ebene AEF die AB ‡ EF, und in der Ebene AEG die AC ‡ EG, so ist die durch ACB gelegte Ebene OP der Ebene MQ parallel.

Beweis. AEF = R = AEG (ex const.) AEF + EAB = 2R = AEG + EAC; daher auch EAB = R = EAC; folglich steht EA senkrecht auf OP. (§. 6. Zus. 3.).

Zus. 1. Durch einen Punkt gibt es mit einer Ebene nur eine Parallelebene.

Zus. 2. Zwei Parallelebenen werden durch eine dritte unter gleichen Neigungswinkeln geschnitten.

Zus. 3. Wenn zwei Ebenen von einer dritten unter gleichen Neigungswinkeln geschnitten werden, sind sie parallel.

II.

Von Körpern überhaupt.

§. 9.

Erklärung. Die Neigung dreier oder mehrerer Ebenen, die einen Punkt gemein haben, heißt körperliche Ecke oder körperlicher Winkel.

Zus. 1. Die Summe aller ebenen Winkel, die einen körperlichen Winkel bilden, muß kleiner seyn, als vier Rechte.

Zus. 2. Zwei körperliche Winkel sind congruent, wenn ihre ebenen Winkel und die Neigungen von diesen der Ordnung nach einander gleich sind.

§. 10.

Erklärung. Ein von allen Seiten begränzter Raum heißt ein geometrischer Körper; die ganze Grenze eines Körpers heißt seine Oberfläche.

Zus. Wenigstens vier Ebenen werden erfordert zur Begrenzung eines Körpers.

§. 11.

Erklärung. Körper heißen regulär, wenn die begrenzenden Ebenen regulär und congruent, und auch alle körperlichen Ecke congruent sind. Reguläre Körper gibt es fünf:

1. Das Tetraëder, von vier
2. das Octaëder, von acht
3. das Ikosaëder, von zwanzig regulären congruenten Dreiecken begrenzt.
4. Das Hexaëder (Würfel), von sechs gleichen Quadraten, und
5. das Dodekaëder, von zwölf regulären congruenten Fünfecken begrenzt.

Daß außer den eben genannten kein anderer regulärer Körper vorkommen könne, zeigt folgende Betrachtung.

Nimmt man an, ein regulärer Körper werde von regulären congruenten Dreiecken begrenzt, so enthalten die ebenen Winkel einer körperlichen Ecke, die von drei solchen Dreiecken gebildet wird, 180°; vier solcher Winkel zu einer körperlichen Ecke vereinigt enthalten 240° und fünf 300°. Sechs, oder noch mehr solcher Dreiecke zu einem körperlichen Winkel vereinigt, würden 360° oder noch mehr geben; in welchem Falle aber (nach §. 9. Zus. 1.) kein körperlicher Winkel möglich ist. Daher können nur drei reguläre Körper von Dreiecken begrenzt werden.

Soll ein regulärer Körper von regulären congruenten Vierecken (Quadraten) begrenzt werden, so geben drei Winkel zur körperlichen Ecke vereinigt 270°, da ein Winkel eines Quadrates 90° enthält; vier oder mehr Quadrate zur körperlichen Ecke vereinigt, würden schon 360° oder mehr geben; daher kann nur ein regulärer Körper von Vierecken begrenzt werden.

Der Winkel eines regulären Fünfeckes enthält 108°; also drei solcher Winkel 324°; vier solcher Winkel enthielten 432°, wodurch keine körperliche Ecke gebildet werden kann; also kann nur ein regulärer Körper von Fünfecken begrenzt werden.

Von regulären Sechs- Sieben rc. Ecken kann kein regulärer Körper begrenzt werden. (§. 9. Zus. 1.).

Netze der regulären Körper.

§. 12.

Erklärung. Die Körper, welche in der Stereometrie näher untersucht werden, sind

1. Prisma und Cylinder.
2. Pyramide und Kegel.
3. Kugel.

§. 13.

Erklärung. Prisma heißt jener geometrische Körper, der von zwei congruenten, geradlinigten, parallelen Figuren als Grundflächen, und so vielen Parallelogrammen als Seitenflächen begrenzt wird, als die Grundflächen Seiten haben. Nach Beschaffenheit der Grundflächen sind die Prismen dreiseitig, vierseitig, vielseitig; eben so sind sie auch senkrecht oder schief, je nachdem die Seitenflächen senkrecht oder schief auf der Grundfläche stehen. Der Punkt, den zwei Seitenflächen mit einer Grundfläche gemein haben, heißt Ecke; die Durchschnittslinie zweier Flächen heißt Kante des Prisma. Höhe des Prisma heißt das Perpendikel von einer Grundfläche zur andern.

Zus. 1. Verwandeln sich die Grundflächen eines Prisma in Kreise, so geht das Prisma in einen Cylinder (Walze) über; die gerade Linie zwischen den Mittelpunkten beider Kreise heißt Axe des Cylinders, und steht diese senkrecht auf beiden Kreisen, so heißt der Cylinder selbst senkrecht; außerdem schief.

Zus. 2. Im senkrechten Prisma steht jede Seitenfläche auf der Grundfläche senkrecht, und die Durchschnittslinie zweier Seitenflächen ist der Höhe gleich. Das nemliche gilt auch vom Cylinder.

§. 14.

Erklärung. Pyramide heißt jener geometrische Körper, der von einer geradlinigten Figur als Grundfläche, und so vielen Dreiecken als Seitenflächen begrenzt wird, als die Grundfläche Seiten hat.

Nach Beschaffenheit der Grundfläche ist die Pyramide drei= vier= oder vielseitig. Spitze der Pyramide heißt jener Punkt, in welchem die Seitenflächen zusammenstoßen; Kanten heißen die Durchschnittslinien zweier Flächen. Höhe der Pyramide heißt das Perpendikel von der Spitze auf die Grundfläche. Pyramiden sind ferner gleichseitig oder ungleichseitig, je nachdem die Seiten gleich oder ungleich sind.

Zus. Verwandelt sich die Grundfläche einer Pyramide in einen Kreis, so geht sie selbst in einen Kegel über. Die gerade Linie von der Spitze zum Mittelpunkte des Kreises heißt Axe des Kegels; steht diese auf der Grundfläche senkrecht, so heißt der Kegel senkrecht (gleichseitig); außerdem schief (ungleichseitig).

§. 15.

Erklärung. Ein Körper, dessen Oberfläche in allen Punkten von einem Punkte gleich weit abstehen, heißt eine Kugel. Der Punkt, von dem alle Punkte der Oberfläche gleich weit abstehen, heißt Mittelpunkt, und jede gerade von diesem Punkte zu einem Punkte der Oberfläche Radius (Halbmesser) der Kugel; eine gerade Linie zwischen zwei Punkten der Oberfläche heißt Sehne; geht sie durch den Mittelpunkt, so heißt sie Durchmesser (Diameter).

Zus. Alle Halbmesser und Durchmesser einer Kugel sind einander gleich.

Zus. 2. Kugeln von gleichen Halbmessern oder Durchmessern sind congruent.

III.

Verhältnisse der Körper.

§. 16.

Lehrsatz. Durch die Grundfläche, eine Seite, nebst ihrer Lage gegen die Grundfläche ist ein Prisma bestimmt.

Beweis. Dadurch sind beide Grundflächen, alle Seitenflächen nebst ihrer Lage gegen die Grundfläche und gegen einander selbst bestimmt; daher ist ein anders Prisma, das mit jenen die genannten Größen congruent hat, jenem selbst congruent.

Zus. Durch den Radius der Grundfläche, die Axe (oder Seitenlinie) und ihre Lage gegen die Grundfläche ist ein Cylinder bestimmt.

§. 17.

Lehrs. Wenn ein Prisma parallel mit der Grundfläche geschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur der Grundfläche congruent.

Beweis. Beide Flächen haben (Fig. 6.) gleichviel Seiten, und da $MN \# AB$, $MP \# AC$, $PO \# CD$, $ON \# DB$, so sind die von den parallelen Seiten eingeschlossenen Winkel beziehlich gleich, und da auch $MA \# NB$, so ist auch $MN = AB$, $MP = AC$ 2c., mithin $MO \cong AD$.

Zus. 1. Wird ein Cylinder (Fig. 7.) parallel mit der Grundfläche geschnitten, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis, und der Grundfläche congruent.

Zus. 2. Wird (Fig. 6.) das Prisma parallel mit der Grundfläche so durchschnitten, daß $AM = \frac{1}{2} AE$, so ist auch Prisma $AP = \frac{1}{2} AF$; oder ist allgemein $AM = \frac{1}{m} AE$, so ist auch $AP = \frac{1}{m} AF$. Wird also ein Prisma parallel mit der Grundfläche geschnitten, so verhalten sich diese Prismen

zu einander, wie ihre Seiten oder Höhen. Dasselbe gilt auch vom Cylinder.

§. 18.

Lehrsatz. Zwei Prismen sind gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

Bew. Es sey (Fig. 6 und 8.) ED ein senkrechtes vierseitiges, KI ein schiefwinklichtes dreiseitiges Prisma; KZ stehe aus K senkrecht auf der Grundfläche TVI, sey also die Höhe von KI. Man lege durch S eine Ebene parallel der Grundfläche so, daß RZ = MA, also auch KR = EM sey. Es ist nun gemäß Voraussetzung Pllgr. AD = △ TVI; daraus ergeben sich folgende Proportionen:

EA : MA = Prisma ED : Prisma MD (§. 17. Zus. 2.)
KZ : RZ = Pr. KI : Pr. SI; daher auch
Pr. ED : Pr. MD = Pr. KI : Pr. SI.

Voranstehende Proportionen gelten, wenn MA = RZ = $\frac{1}{\infty}$ = 0 sind; dann aber verwandeln sich die Prismen MD, SI in die Grundflächen AD, TVI, und man hat

Pr. ED : Pllgr. AD = Pr. KI : △ TVI.

Da aber gemäß Voraussetzung Pllgr. AD = △ TVI, so ist auch Pr. ED = Pr. KI.

Zus. 1. Cylinder von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

Zus. 2. Da ein Cylinder als ein Prisma betrachtet werden kann, dessen Grundfläche unendlich viele Seiten hat, so ist ein Cylinder einem Prisma gleich, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

§. 19.

Erklärung. Ein Prisma, dessen Oberfläche aus lauter Parallelogrammen besteht, heißt Parallelepipedon, das recht- oder schiefwinklicht ist, je nachdem die Parallelogramme lauter Rechtecke sind, oder nicht. Sind im rechtwinklichen Parallelepipedon alle begrenzenden Flächen Quadrate, so heißt es ein Würfel (Kubus).

Zus. Zur Bestimmung eines Würfels ist blos eine Seite nothwendig.

§. 20.

Lehrs. Durch die Grundfläche und die Spitze ist eine Pyramide bestimmt.

Beweis. Dadurch sind außer der Grundfläche alle Seitenflächen, nebst ihrer Lage gegen die Grundfläche, also die Pyramide selbst, bestimmt.

Zus. Durch den Radius der Grundfläche und die Spitze ist ein Kegel bestimmt.

§. 21.

Erklärung. Wenn eine Pyramide (Fig. 9.) durch eine der Grundfläche CB parallele Ebene GF geschnitten wird, so heißt der zwischen diesen Parallelebenen enthaltene Theil ED eine abgekürzte Pyramide; die beiden Parallelebenen heißt man die Grundflächen, und das Perpendikel von einer Grundfläche zur andern heißt die Höhe der abgekürzten Pyramide.

Zus. Wird (Fig. 10.) ein Kegel parallel mit der Grundfläche geschnitten, so heißt der zwischen der Ebene EOF und ADB enthaltene Theil ein abgekürzter Kegel, und die Entfernung der Grundflächen von einander dessen Höhe.

§. 22.

Lehrsatz. Die Grundflächen einer abgekürzten Pyramide sind einander ähnlich, und verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze. (Fig. 9.)

Beweis. Beide Durchschnittsfiguren haben gleiche Seitenzahl, und da EG # AC, GH # CD, HF # DB, FE # BA, so sind die von den parallelen Seiten gebildeten Winkel beziehlich gleich, also W.G = W.C, W.H = W.D ꝛc... Man hat ferner:

$$IG : IC = GE : CA$$ und

$$IG : IC = GH : CD$$ also auch

$$GE : CA = GH : CD;$$ so ist auch

$$GH : CD = HF : DB$$ ꝛc...

Daher stehen auch alle Seiten dieser Grundflächen in Proportion, mithin beide Figuren EH, AD einander ähnlich.

Zieht man die Höhe der Pyramide IP, so schneidet die Ebene CIP die Ebene GH in der geraden GM, und es ist GM ‡ CP; daraus ergibt sich:

$$IG : IC = IM : IP$$
$$IG : IC = GE : CA; \text{ daher}$$
$$IM : IP = GE : CA \text{ oder}$$
$$IM^2 : IP^2 = GE^2 : CA^2; \text{ und da}$$
$$EH : AD = GE^2 : CA^2; \text{ so ist auch}$$
$$EH : AD = IM^2 : IP^2$$

Zus. 1. Die Grundflächen eines abgekürzten Kegels sind Kreise, und verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

Zus. 2. Wenn Pyramide und Kegel parallel mit den Grundflächen geschnitten werden (Fig. 9 und 10.), so ist IEGHF ∽ IACDB und CEF ∽ CAB.

§. 23.

Lehrsatz. Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich. (Fig. 11 und 12.).

Beweis. In beiden Pyramiden theile man die Höhen in unendlich viele kleine Theile, und lege durch die Theilungspunkte Ebenen parallel zur Grundfläche, so entstehen unendlich viele kleine abgekürzte Pyramiden, die Prismen von gleicher Grundlinie und Höhe gleich sind. Da nun ABCD = EKF (ex hypoth.) und die unendlich kleinen Pyramiden MD, SF, als Prismen betrachtet, wegen gleicher Grundlinie und Höhe einander gleich sind, so sind auch alle übrigen abgekürzten Pyramiden einander gleich, aus deren Summirung die beiden Pyramiden selbst hervorgehen, und da alle Theile einander gleich sind, so sind es auch die entsprechenden Ganzen, oder

$$\text{Pyr. RABDC} = \text{Pyr. VEKF}.$$

Zus. 1. Kegel von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich.

Zus. 2. Mehrere Pyramiden von gleicher Höhe und verschiedenen oder gleichen Grundflächen sind gleich einer einzigen Pyramide, welche die nemliche Höhe hat, deren Grundfläche aber gleich ist den Grundflächen der übrigen Pyramiden.

§. 24.

Lehrsatz. Jedes dreiseitige Prisma läßt sich in drei Pyramiden theilen, die einander gleich sind. (Fig. 13.).

Beweis. Man lege im Prisma AD durch A, E, C und C, E, F Ebenen, so entstehen die drei Pyramiden ECBA, DEFC und EFCA; unter diesen ist wegen gleicher Grundfläche und Höhe

Pyr. ECBA = Pyr. DEFC.

Nimmt man bei der Pyramide DEFC das △ FCD als Grundfläche, und bei der Pyramide EFCA das △ ACF als Grundfläche, so haben sie ihre gemeinschaftliche Spitze in E; mithin ist auch hier bei gleicher Grundfläche und Höhe

Pyr. DEFC = Pyr. EFCA; also auch

Pyr. EFCA = Pyr. ECBA.

Zus. 1. Es ist also eine Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundlinie und Höhe.

Zus. 2. Ein Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Zus. 3. Kegel und Pyramide sind bei gleicher Grundfläche und Höhe einander gleich.

§. 25.

Lehrsatz. Wenn eine Kugel von einer Ebene durchschnitten wird, so ist der Kugelschnitt ein Kreis. (Fig. 14.).

Beweis. Geht der Kugelschnitt durch den Mittelpunkt der Kugel, so stehen die Punkte des Umfanges des Durchschnittes, als Punkte auf der Oberfläche der Kugel,

vom Mittelpunkte gleich weit ab; also ist der Durchschnitt ein Kreis.

Ist der Kugelschnitt außer dem Mittelpunkte, so fälle man vom Mittelpunkte auf die Ebene des Schnittes das Perpendikel CO, nehme im Umfange des Schnittes die beliebigen Punkte, P, Q und zieht die geraden CP, CQ, OP, OQ, so ist $\triangle COP \cong \triangle COQ$; also auch $OP = OQ$; mithin stehen P und Q, und so alle andern Punkte des Umfanges vom Mittelpunkte O gleichweit ab, folglich der Schnitt ein Kreis.

Zus. 1. Ein Kugelschnitt durch den Mittelpunkt der Kugel ist ein größter Kreis.

Zus. 2. Ein Perpendikel vom Mittelpunkte der Kugel auf einen kleinern Kugelkreis geht durch dessen Mittelpunkt, so wie eine senkrechte auf einen kleinern Kugelkreis durch dessen Mittelpunkt durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

§. 26.

Erklärung. Zwei Punkte M, N (Fig. 14.) an der Oberfläche der Kugel, deren jeder von allen Punkten des Umfanges eines Kugelkreises gleichweit absteht, heißen die Pole dieses Kreises, und die gerade MN zwischen ihnen heißt seine Axe.

Zus. 1. Die Axe eines Kreises steht auf diesen senkrecht und geht immer durch den Mittelpunkt der Kugel.

Zus. 2. Die Peripherie eines größten Kreises steht von beiden Polen 90° ab.

Zus. 3. Parallele Kugelkreise haben einerlei Pole, so wie die einerlei Pole habenden Kugelkreise parallel sind.

§. 27.

Erklärung. Die Ebene DR, die mit der Oberfläche der Kugel nur einen Punkt M gemein hat, heißt Berührungsebene.

Zus. Der Radius der Kugel steht durch den Berüh-

rungspunkt auf die Berührungsebene senkrecht; und eine Ebene, auf die der Endpunkt des Kugel-Radius senkrecht steht, ist eine Berührungsebene.

§. 28.

Erklärung. Jener Theil der Kugel, der zwischen zwei größten Halbkreisen der Kugel MEN, MBN (Fig. 14.) eingeschlossen ist, heißt keilförmiger Kugelausschnitt.

Zus. Die Größe eines keilförmigen Kugelausschnittes hängt von dem Radius und Neigungswinkel ab, unter welchem zwei größte Kugelkreise, die einander halbiren, sich schneiden.

IV.

Ausmessung der Körper.

§. 29.

Erklärung. Zur Ausmessung der Oberflächen der Körper dienen die in der ersten Abtheilung §. 164 angeführten Flächenmaße.

Zur Messung der Körper selbst haben wir den bayerschen Kubikfuß, d. i. einen Würfel, dessen Seite ein Fuß ist.

Nach der Dezimaleintheilung ist 1 Kubikfuß $(1^{c'}) =$ 1000 Kubikzoll $(1000^{c''})$ und $1^{c''} =$ 1000 Kubiklinien $(1000^{c'''})$. Nach der Duodezimaleintheilung ist $1^{c'} = 1728^{c''}$; $1^{c''} = 1728^{c'''}$. Der bayerische Eimer = 60 Maß enthält $2^{c'}$ $580^{c''}$ Dezimalmaß, mithin die Maß $44^{c''}$.

Die Franzosen haben als Grundmaß für feste Körper den Kubik-Mètre (Stère).

1 C. mètre = 1000 C. Decimètres
1 C. Decimètre = 1000 C. Centimètres
1 C. Centimètre = 1000 C. Millimètres.

Für Flüssigkeiten ist das Grundmaß der Kubik-Decimètre (Litre). Man hat also

1 C. Mètre =	1000 Litres	=	1 Kilolitre
1 Kilolitre =	10 Hectolitres		
1 Hectolitre =	10 Decalitres		
1 Decalitre =	10 Litres		
1 Litre =	10 Decilitres	=	1 C. Decimètre
1 Decilitre =	10 Centilitres		
1 Centilitre =	10 Millilitres	=	10 C. Centimètre.

Die Reduktion des bayerischen Dezimal= auf Duodezimalmaß, und umgekehrt, so wie des bayerischen Maßes auf französisches, und umgekehrt, geschieht durch Proportion.

§. 30.

Aufgabe. Die Oberfläche eines Prisma zu berechnen.

Aufl. Man berechnet alle Seitenflächen des Prisma, addirt ihre Summe zur doppelten Grundfläche, so gibt die ganze Summe den Quadratinhalt der Oberfläche.

Zus. 1. Heißt die Seite eines Würfels a, so ist der Inhalt einer Seitenfläche $= a^2$, und die Oberfläche des ganzen Würfels $= 6a^2$.

Zus. 2. Die Oberfläche eines Cylinders bestimmt sich durch die zwei Kreise, als Grundflächen, und die krumme Seitenfläche. Heißt der Radius des Kreises r, so sind die zwei Grundflächen $2r^2\pi$. Die krumme Seitenfläche aber kann betrachtet werden als ein Rechteck, dessen Grundlinie die Peripherie des Kreises, und dessen Höhe die Seitenlinie des Cylinders ist; ist diese Höhe $= h$, so ist die krumme Seitenfläche $= 2r\pi . h$; daher

$$\text{Superf. Cyl.} = 2r^2\pi + 2r\pi . h$$
$$= 2r\pi\,(r + h).$$

§. 31.

Lehrsatz. Man findet den Cubikinhalt eines Prisma, wenn man die Grundfläche und Höhe, durch gleichartiges Maß ausgedrückt, mit einander multiplizirt:

d. i. $\text{Pr.} = G . H.$

Beweis. (Fig. 15.) Es sey qadb = dl = lm =

$1^{c'}$, so enthält das Parallelepipedon qp $3^{c'}$. Es ist aber dessen Länge am $= L = 3'$; dessen Höhe ab $= H = 1'$ und Breite aq $= B = 1'$; mithin Prallp. qp $= L.B.H = 3.1.1. = 3^{c'}$. Legt man auf dieses noch die drei Kubikfuß obpcx, so enthält das Parallelepipedon qc $6^{c'}$; seine Höhe aber ist ag $= 2'$; bei gleicher Länge und Breite mit dem vorigen; daher ist Prallp. qc $= 3.1.2 = 6^{c'}$. Setzen wir an das Prallp. qc noch ein gleiches hx; so entsteht das Prallp. hc $= 12^{c'}$, dessen Breite ah $= 2'$ ist, bei gleicher Länge und Höhe mit qc; daher ist Prallp. hc $= 3.2.2 = 12^{c'}$.

Es bestimmt sich also der Inhalt eines Parallelepipedons aus dem Produkte der Länge, Breite und Höhe, oder aus dem Produkte der Grundfläche und Höhe. Da nun jedes Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe dem Parallelepipedon gleich ist, so ergibt sich der Inhalt des Prisma aus dem Produkte der Grundfläche und Höhe.

Zus. 1. Ist nach der im Lehrsatze angenommenen Bezeichnung $Pr. = G.H$; so ist $G = \frac{Pr.}{H}$ und $H = \frac{Pr.}{G}$; es läßt sich also aus zwei von diesen gegebenen Größen die dritte bestimmen.

Zus. 2. Heißt die Seite eines Würfels ($=$ Cub.) a, so hat man $Cub. = a^3$; woraus $a = \sqrt[3]{Cub.}$

Zus. 3. Ist $r =$ Radius der Grundfläche eines Cylinders, und $h =$ Höhe desselben, so hat man $Cyl. = r^2\pi.h$. Daraus hat man wieder $h = \frac{Cyl.}{r^2\pi}$ und $r = \sqrt{\frac{Cyl.}{\pi h}}$.

§. 32.

Aufgabe. Die Oberfläche einer Pyramide zu berechnen.

Auflösung. Man berechne die Grundfläche, und die Seitenflächen (Dreiecke), so gibt ihre Summe die Oberfläche der Pyramide.

Zus. Die krumme Seitenfläche eines Kegels ist gleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie die Peripherie der Grundfläche, und dessen Höhe die Seitenlinie des Kegels ist; setzen wir den Radius der Grundfläche = r; die Seitenlinie = h, so ist:

$$\text{Superf. Con.} = \frac{2r\pi . h}{2} + r^2\pi$$
$$= r\pi\,(h + r).$$

§. 33.

Lehrs. Man erhält den Kubikinhalt einer Pyramide, wenn man das Produkt der Grundfläche und Höhe durch 3 dividirt, d. i.

$$\text{Pyr.} = \frac{G . H}{3}.$$

Beweis. Das Produkt aus Grundfläche in die Höhe gibt den Cubikinhalt eines Prisma; da nun bei gleicher Grundfläche und Höhe die Pyramide der dritte Theil des Prisma ist, so gibt die Division durch 3 in jenes Produkt den Cubikinhalt der Pyramide.

Zus. Heißt der Radius eines Kegels r, dessen Höhe h, so ist

$$\text{Con.} = \frac{r^2\pi . h}{3}.$$

§. 34.

Aufgabe. Die Oberfläche einer abgekürzten Pyramide finden.

Auflösung. Man berechne die beiden Grundflächen und die Seitenflächen (Trapeze), so gibt die Summe aller Flächen den Inhalt der Oberfläche.

Zus. Heißt im senkrechten abgekürzten Kegel R der Radius der untern, und r der Radius der obern Grundfläche, h die Seitenlinie, so ist

$$\text{Superf. Con. dec.} = R^2\pi + r^2\pi + \left(\frac{2R\pi + 2r\pi}{2}\right) h.$$
$$= R^2\pi + r^2\pi + (R\pi + r\pi)\,h$$
$$= \pi\,(R^2 + r^2 + h\,(R + r)).$$

§. 35.

Aufgabe. Den Kubikinhalt einer abgekürzten Pyramide finden. (Fig. 9.).

Auflösung. Heißt die abgekürzte Pyramide ED, so ist ihr Inhalt gleich dem Inhalte der ganzen Pyramide IACDB weniger dem Inhalte der Pyramide IEGHF. Setzen wir nun die untere Grundfläche = G, die obere = g, so ist

$$\text{Pyr. dec.} = \frac{G \cdot IP}{3} - \frac{g \cdot IM}{3}.$$

Ist MP, die Höhe der abgekürzten Pyramide, = h gegeben, und setzen wir IM = x, so ist

$$\text{Pyr. dec.} = \frac{G \cdot (h + x)}{3} - \frac{gx}{3}.$$

Es ist aber (nach §. 22.)

$G : g = (h + x)^2 : x^2$; oder

$\sqrt{G} : \sqrt{g} = h + x : x$; daraus ergibt sich

$$x = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}.$$

Daher $\text{Pyr. dec.} = \frac{Gh + Gx - gx}{3} = \frac{Gh + (G - g)x}{3} =$

$$\frac{Gh + (G - g)\frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}}{3} = \frac{Gh + h\sqrt{g}(\sqrt{G} + \sqrt{g})}{3} =$$

$$\tfrac{1}{3}h(G + \sqrt{g}(\sqrt{G} + \sqrt{g})) = \tfrac{1}{3}h(G + g + \sqrt{Gg}).$$

Zus. Ist beim abgekürzten Kegel R der Radius der untern, r der Radius der obern Grundfläche, und seine Höhe = h, so ist

$$\begin{aligned} \text{Con. dec.} &= \tfrac{1}{3}R^2\pi(h + x) - \tfrac{1}{3}r^2\pi \cdot x \\ &= \tfrac{1}{3}R^2\pi h + \tfrac{1}{3}R^2\pi x - \tfrac{1}{3}r^2\pi x \\ &= \tfrac{1}{3}\pi(R^2 h + (R^2 - r^2)x). \end{aligned}$$

Es ist aber

$R^2\pi : r^2\pi = (h + x)^2 : x^2$; also

$R : r = h + x : x$; und man hat

$$x = \frac{rh}{R - r}.$$

2*

Daher Con. dec. $= \frac{1}{3}\pi\left(R^2h + (R^2 - r^2)\frac{rh}{R-r}\right)$

$$= \tfrac{1}{3}h\pi(R^2 + (R + r)r)$$
$$= \tfrac{1}{3}h\pi(R^2 + Rr + r^2).$$

§. 36.

Lehrsatz. Die Oberfläche einer Kugelzone ABGP (Fig. 16.), durch zwei sich sehr nahe liegende parallele Kugelkreise eingeschlossen, ist einem Rechtecke gleich, das die Peripherie eines größten Kugelkreises zur Grundlinie, und die Entfernung der Grundflächen zur Höhe hat, oder Zona ABGP $= 2r\pi \,.\, DF$.

Beweis. Da die beiden Kugelschnitte BFG, ADP sich sehr nahe liegen, so kann die Oberfläche ABGP betrachtet werden als die Seitenfläche eines abgekürzten Kegels, dessen Flächeninhalt ist $= \left(\frac{2 \,.\, FG \,.\, \pi + 2 \,.\, DP \,.\, \pi}{2}\right) GP$ (§. 34. Zus.) $= \pi \,.\, GP(FG + DP)$. Nun aber kann FG $=$ DP genommen werden, da sich beide Kreise sehr nahe liegen; also ist

$$\text{Zona ABGP} = 2\pi GP \,.\, FG.$$

Ziehen wir durch G die Tangente GM, CE senkrecht auf beide Kreise, GO senkrecht auf AM und den Radius CG, so ist FGC + CGO $= 90° =$ CGO + OGM; daher FGC $=$ OGM; CFG $=$ R $=$ OGM; mithin $\triangle$ CFG $\backsim$ $\triangle$ OGM.

Es ist nun FG : CG $=$ GO : GM; und GM $= \frac{CG \,.\, GO}{FG}$.

Weil beide Kreise sich sehr nahe liegen, so kann Tangente GM $=$ Bogen GP gesetzt werden, und man hat

$$GP = \frac{CG \,.\, GO}{FG}, \text{ und}$$

$$\text{Zona ABGP} = 2\pi \,.\, FG \,.\, \frac{CG \,.\, GO}{FG} =$$
$$2\pi CG \,.\, GO = 2\pi r GO = 2r\pi \,.\, FD.$$

Zus. Wird nun FD = r, so verwandelt sich die Zone in die Oberfläche der Halbkugel, welche gleich wird $2r\pi . r = 2r^2\pi$; also die Oberfläche der ganzen Kugel = $4r^2\pi$; die Oberfläche einer Kugel ist also vier größten Kreisen gleich. Bezeichnet man die Oberfläche der Kugel durch S, so ist

$$S = 4r^2\pi \text{ und}$$

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Setzt man $r = \frac{1}{2}d$, so ist

$$S = d^2\pi \text{ und}$$

$$d = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

§. 37.

Lehrsatz. Bezeichnet r den Halbmesser, d den Durchmesser einer Kugel, so ist der Kubikinhalt der Kugel = $\frac{4}{3}r^3\pi = \frac{1}{6}d^3\pi$.

Beweis. Jede Kugel kann betrachtet werden als zusammengesetzt aus unendlich vielen und kleinen Pyramiden, die ihre gemeinschaftliche Spitze in dem Mittelpunkte, und zur Höhe den Radius haben; die Grundfläche einer jeden solchen Pyramide ist ein unendlich kleiner Theil der Kugeloberfläche = $\frac{4r^2\pi}{\infty}$. Es ist also der Kubikinhalt einer solchen Pyramide = $\frac{1}{3}r . \frac{4r^2\pi}{\infty}$. Da aber die Kugel aus unendlich vielen solchen Pyramiden besteht, so ist der Inhalt der ganzen Kugel = $\frac{1}{3}r . \frac{4r^2\pi}{\infty} . \infty = \frac{4}{3}r^3\pi$. Setzt man $r = \frac{1}{2}d$, so ist

$$\text{Sphaer.} = \tfrac{1}{6}d^3\pi.$$

Bezeichnet C den Kubikinhalt der Kugel, so ist C = $\frac{4}{3}r^3\pi = \frac{1}{6}d^3\pi$; und daraus ergibt sich $r = \sqrt[3]{\frac{3C}{4\pi}}$; $d = \sqrt[3]{\frac{6C}{\pi}}$.

§. 38.

Lehrsatz. Wenn ein Cylinder, eine Kugel und ein

Kegel so beschaffen sind, daß Cylinder und Kegel als Grundfläche einen größten Kreis der Kugel, und als Höhe den Durchmesser haben, so verhalten sich diese Körper der Reihe nach wie 3, 2, 1.

Beweis. Es ist Cyl. $= r^2\pi . 2r = 2r^3\pi$.

$$\text{Sphaer.} = \tfrac{4}{3}r^3\pi.$$

$$\text{Con.} = r^2\pi . \tfrac{1}{3}2r = \tfrac{2}{3}r^3\pi.$$ Daher

$$\text{Cyl.} : \text{Sphaer.} : \text{Con.} = 2r^3\pi : \tfrac{4}{3}r^3\pi : \tfrac{2}{3}r^3\pi$$
$$= 6r^3\pi : 4r^3\pi : 2r^3\pi$$
$$= 3 : 2 : 1.$$

Zus. 1. Heißt der Radius einer Kugel R, ihr Durchmesser D, ihr Kubikinhalt C; der Radius einer andern Kugel r, Durchmesser d, Kubikinhalt c, so ist:

$$C = \tfrac{4}{3}R^3\pi = \tfrac{1}{6}D^3\pi$$
$$c = \tfrac{4}{3}r^3\pi = \tfrac{1}{6}d^3\pi;$$ daher
$$C : c = \tfrac{4}{3}R^3\pi : \tfrac{4}{3}r^3\pi = \tfrac{1}{6}D^3\pi : \tfrac{1}{6}d^3\pi$$
$$= R^3 : r^3 = D^3 : d^3,$$

d. h. Kugeln verhalten sich rücksichtlich ihres körperlichen Inhaltes, wie die Kubuse ihrer Radien oder Durchmesser.

Zus. 2. Aehnliche Körper verhalten sich überhaupt, wie die Kubuse der an ihnen ähnlich gezogenen Linien.

§. 39.

Aufgaben. 1. Eine Mauer enthält 40′ Länge, 30′ Höhe und $2\frac{1}{2}$′ Breite, wie viele Ziegelsteine werden zu dieser Mauer erfordert?

Auflösung. Die Mauer stellt ein Parallelepipedon vor; daher ihr kubischer Inhalt sich aus dem Produkte der Grundfläche in die Höhe, oder aus dem Produkte der Länge, Höhe und Breite ergibt; es ist also

$$\text{Cub. J.} = 40 \times 30 \times \tfrac{5}{2} = 3000^{c'}.$$

Nun aber enthält ein Ziegelstein 1′ 2″ Länge, 7″ Breite, $2\frac{1}{2}$″ Dicke (Duodezimalmaß); es ist daher der kubische Inhalt eines Ziegelsteines $= 14 \times 7 \times \frac{5}{2} = 245^{c''}$ (Duodezi-

malmaß) $= \frac{245^{c'}}{1728}$; also ist die Zahl der erforderlichen Steine $= 3000 : \frac{245}{1728} = 600 : \frac{49}{1728} = \frac{1036800}{49} = 21160$ beiläufig.

Wie groß ist die Oberfläche dieser Mauer?

2. Das Münchner Schäffel ist ein abgekürzter Kegel, dessen Höhe $= 1'\ 7''$; Durchmesser der untern Grundfläche $= 2'\ 10''$; Durchmesser der obern Grundfläche $= 2'5''$ (Duodezimalmaß); wie viel Kubikfuß, Zoll rc. enthält es?

Auflösung. Es ist Con. dec. $= \frac{1}{3}h\pi(R^2 + Rr + r^2)$; daher C.d $= \frac{1}{3} . 19 . 3,14159 (17^2 + 17 . 14,5 + 14,5^2)$
$= \frac{1}{3} . 19 . 3,14159 (289 + 246,5 + 210,25)$
$= \frac{1}{3} . 19 . 3,14159 (745,75)$.

Nun ist log. 19 = 1.2787536
log. 3,14159 = 0.4971499
log. 745,75 = 2.8725933

4.6484968
— log. 3 = 0.4771213

4.1713755 =

log. 14838; das bayerische Schäffel enthält also 14838 Duodezimalkubikzoll oder

$8^{c'}\ 586^{c''}$ Dezimalmaß.

3. Betrachten wir die Erde als Kugel, deren Radius 859,5 geographische Meilen ist, so ist ihre Oberfläche $4r^2\pi$; nun ist:

log. 4 = 0.6020600
2 log. 859,5 = 5.8684818
log. π = 0.4971499

= 6.9676917 = log. 9283100,

also enthält die Erde 9,283,100 geographische Quadratmeilen beiläufig. Ihr körperlicher Inhalt ist $\frac{4}{3}r^3\pi$; es ist aber:

$$\begin{array}{rl} \log. 4 = & 0.6020600 \\ 3 \log. 859{,}5 = & 8.8027377 \\ \log. \pi = & 0.4971499 \\ \hline & 9.9019476 \\ - \log. 3 = & 0.4771213 \\ \hline \end{array}$$

$$9.4248263 = \log. 2{,}659{,}660{,}000$$

mithin enthält die Erde beiläufig 2,659,660,000 Kubikmeilen.

Zus. Der Halbmesser der Sonne beträgt 113 Erdhalbmesser; der Halbmesser des Mondes aber 234 geographische Meilen; wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt dieser Körper, als Kugeln betrachtet?

4. Eine runde steinerne Säule (Cylinder) hat im Halbmesser der Grundfläche 1′5″; Höhe 30′ (Dezimalmaß); man suche Oberfläche und Kubikinhalt.

Auflösung. Die Oberfläche ist $= 2r\pi (r + h) = 2 . 1{,}5 . \pi . 31{,}5.$ Nun ist

$$\begin{array}{rl} \log. 2 = & 0.3010300 \\ \log. 1{,}5 = & 0.1760913 \\ \log. \pi = & 0.4971499 \\ \log. 31{,}5 = & 1.4983106 \\ \hline \end{array}$$

$$2.4725818 = \log. 296{,}88;$$

also ist die Oberfläche dieses Cylinders $296^{\square'}\ 88^{\square''}$.

Der körperliche Inhalt ist $= r^2\pi . h$; nun ist

$$\begin{array}{rl} 2 \log. r = & 0.3521826 \\ \log. \pi = & 0.4971499 \\ \log. 30 = & 1.4771213 \\ \hline \end{array}$$

$$2.3264528 = \log. 212{,}057;$$

Der Kubikinhalt dieses Cylinders ist also $212^{c'}\ 57^{c''}$.

5. Die Baumstämme nähern sich mehr oder weniger senkrechten abgekürzten Kegeln, und es läßt sich dadurch ihr kubischer Inhalt berechnen; häufig aber betrachtet man

sie zur leichtern Berechnung als gleich einem Cylinder, dessen Höhe = der Höhe des Kegels, und dessen Halbmesser der Grundfläche = dem arithmetischen Mittel aus den Halbmessern der beiden Grundflächen des Kegels ist. Um zu sehen, welche Differenz bei beiden Berechnungsarten sich ergebe, soll Folgendes berechnet werden: ein Baumstamm halte in der Höhe 25′; der untere Halbmesser sey 1′ 8″; der obere 1′ 2″; wie groß ist sein Kubikinhalt? (Dezimalmaß.)

a) als abgekürzter Kegel: hier hat man

$$\text{Con. dec.} = \tfrac{1}{3} h\pi (R^2 + Rr + r^2)$$
$$= \tfrac{1}{3} . 25 . \pi (3{,}24 + 2{,}16 + 1{,}44) =$$
$$\tfrac{1}{3} . 25 . \pi . 6{,}84 ; \text{ nun ist}$$

$$\log. 25 = 1.3979400$$
$$\log. \pi = 0.4971499$$
$$\log. 6{,}84 = 0.8350561$$
$$2.7301460$$
$$- \log. 3 = 0.4771213$$
$$2.2530247 = \log. 179{,}070$$

mithin der Kubikinhalt $179^{c'}\ 70^{c''}$.

b) als Cylinder; hier ist

$$\text{Cyl.} = r^2\pi h \text{ oder}$$
$$\text{Cyl.} = \left(\frac{1{,}8 + 1{,}2}{2}\right)^2 . \pi 25$$
$$= 1{,}5^2 . \pi . 25 ; \text{ nun ist}$$

$$2 \log. 1{,}5 = 0.3521826$$
$$\log. \pi = 0.4971499$$
$$\log. 25 = 1.3979400$$
$$2.2472725 = \log. 176{,}715 ;$$

also der Kubikinhalt $176^{c'}\ 715^{c''}$; dieses Resultat ist also gegen das vorige etwas zu klein.

c) als Cylinder kann genannter Körper noch betrachtet werden, indem man den kubischen Inhalt als Produkt

aus der Höhe in das arithmetische Mittel der beiden Grundflächen erhält. Nach diesen hat man die untere Grundfläche $= R^2\pi = 1{,}8^2 . \pi$; nun ist

$$2 \log. 1{,}8 = 0.5105450$$
$$\log. \pi = 0.4971499$$
$$1.0076949 = \log. 10{,}1788$$

die obere Grundfläche $= r^2\pi = 1{,}2^2\pi$; es ist

$$2 \log. 1{,}2 = 0.1583624$$
$$\log. \pi = 0.4971499$$
$$0.6555123 = \log. 4{,}5239.$$

Mithin Con. dec. $= \left(\frac{R^2\pi + r^2\pi}{2}\right)h =$

$$\frac{10{,}1788 + 4{,}5239}{2} . 25 = \frac{14{,}7027}{2} . 25 =$$

$7{,}3513 \times 25 = 183{,}782$. Daher nach dieser Berechnung $183^{c'}\ 782^{c''}$, welches Resultat gegen die erstere Berechnung zu groß ist.

6. Den kubischen Inhalt eines Fasses angeben.

Auflösung. 1. Man setze das Faß gleich einem Cylinder, der zur Höhe die Länge des Fasses, zum Halbmesser der Grundfläche aber das arithmetische Mittel aus dem Halbmesser beim Spundloche und den Halbmesser beim Faßboden habe.

Auflösung. 2. Man lege beim Spundloche eine Ebene durch das Faß, parallel den beiden Faßböden, und betrachte die zwei entstehenden Körper als abgekürzte Kegel, deren Summe den Cubikinhalt des Fasses angibt.

§. 40.

Aufgabe. Aus dem Kubikinhalte eines Körpers sein Gewicht berechnen.

Auflösung. Hiezu ist nothwendig, das spezifische Gewicht des Körpers zu wissen, d. h. zu wissen, wie viel-

mal schwerer oder leichter der Körper sey, als destillirtes Wasser unter dem nemlichen Raumesinhalt. Da nun der Kubikfuß destillirtes Wasser nahezu 70 ℔. wiegt, so läßt sich das Gewicht eines Körpers leicht bestimmen. Im §. 39. 4. wurde eine Säule berechnet, deren Kubikinhalt $212^{c'}\ 57^{c''}$ gefunden wurde; gesetzt diese Säule sey aus Granit, dessen spezifisches Gewicht = 2,956, so haben wir Gewicht der ganzen Säule = 212,057 × 70 × 2,956; nun ist log. 212,057 = 2.3264527

log. 70 = 1.8450980

log. 2,956 = 0.4707044

4.6422551 =

log. 43879.

Mithin ist das Gewicht der ganzen Säule 42879 ℔.

Zus. Um andere dergleichen Aufgaben lösen zu können, ist das spezifische Gewicht folgender Körper (aus Gehlers physikalischem Wörterbuch. Art. Gewicht.) hier angegeben, (reines Wasser = 1,000)

Birnbaumholz	=	0,661
Blei	=	11,445
Buchenholz	=	0,852
Ebenholz aus Amerika	=	1,331
Eichenholz	=	1,170
Eisen, geschmiedet	=	7,788
Elfenbein	=	1,917
Gold, gehämmert	=	19,361
Granit	=	2,956
Kirschbaumholz	=	0,715
Korkholz	=	0,240
Kupfer	=	8,788
Lindenholz	=	0,604
Marmor, Parischer	=	2,838
Mauerstein	=	2,000

Platina, gehämmert	=	21,314
Quecksilber	=	13,597
Sandstein	=	2,500
Silber, gehämmert	=	10,622
Wallnußbaum	=	0,671
Atmosphärische Luft	=	0,00128308.

Wenn der §. 39. 5. berechnete Baumstamm, der als abgekürzter Kegel 179c′ 70c″ enthält, Eichenholz ist, wie groß ist sein Gewicht?

D. Trigonometrie.

I. Einleitung.

§. 41.

In der Geometrie wurde nachgewiesen, daß zwei Dreiecke in fünf Fällen congruent seyen, daß nemlich, wenn in einem Dreiecke drei Stücke (worunter wenigstens eine Seite seyn muß) gegeben sind, das ganze Dreieck geometrisch construirt werden könne, und jedes andere Dreieck, welches die gegebenen Stücke mit jenem Dreiecke gleich hat, ihm selbst congruent seyn müsse.

Es müssen sich also in einem Dreiecke, wenn drei Stücke gegeben sind, die übrigen durch Rechnung finden lassen, und diese Aufgabe löst die Trigonometrie; die sich entweder mit Auflösung ebener Dreiecke beschäftigt; ebene Trigonometrie; oder mit Dreiecken, die durch Bogen größter Kreise auf der Oberfläche einer Kugel gebildet werden; sphärische (körperliche) Trigonometrie.

Jedes Dreieck enthält drei Seiten und drei Winkel; da nun aus Seiten Winkel, und aus Winkeln Seiten bestimmt werden müssen, diese Größen aber nicht gleichartig sind, so werden zur Herstellung der Gleichartigkeit alle Winkel eines Dreiecks durch Linien ausgedrückt, die man auch deßwegen trigonometrische Linien nennt.

II. Bestimmung der trigonometrischen Linien.

§. 42.

Nimmt man (Fig. 17.) einen beliebigen Winkel ACB als Centriwinkel, dessen Schenkel AC, BC Radien des Kreises sind, so heißt die senkrechte BG die man vom Endpunkte eines Radius auf den andern Radius zieht, der Sinus des Winkels ACB (= a) oder Bogens AB, oder BG = Sin. ACB = Sin. AB = Sin. a.

Nehmen wir an, der Winkel ACB wachse, so daß bei unbeweglichen AC, der Radius BC sich allmählig dem OC nähere, so wird auch der Sinus wachsen, und fällt endlich BC mit OC zusammen, d. h. wird der Winkel ein rechter, so wird der Sinus gleich dem Radius OC, und heißt dann sinus totus. So wie aber der Winkel größer als 90° wird, nimmt sein Sinus ab; so ist Sinus ACH = HS; es ist aber auch HS = sin. HCK; mithin haben die Nebenwinkel ACH, HCK, die man Supplementswinkel heißt, gleiche Sinus; für den geraden Winkel ACK (180°) wird der Sinus = 0. Für den Bogen AOKL oder den erhabenen Winkel ACL ist der Sinus LS, der aber eine Richtung hat, die der Richtung der Sinuse von 0° bis 180° entgegengesetzt ist; diese entgegengesetzte Richtung hat auch MC = sin. AOKM = sin. 270° = dem Radius, und die Sinuse der Winkel von 270° bis 360°. Nimmt man nun die Sinuse im ersten und zweiten Quadranten positiv, so sind die im dritten und vierten Quadranten negativ.

Nimmt man auf das Wachsen und Abnehmen, so wie die Grenzen des Sinus in den 4 Quadranten des Kreises Rücksicht, so findet man, daß die Grenzen zwischen 0 und Radius (= r) fallen; zugleich, daß er im ersten Quadranten wachse, im zweiten abnehme, im dritten wachse und im vierten wieder abnehme.

Daraus ergibt sich Folgendes: setzen wir einen beliebigen Winkel = a, so ist

sin. a = sin. (180° — a).

sin. (180° + a) = — sin. a = — sin. (180° — a); d. h. Winkel, deren Summe oder Differenz 180° geben, haben gleiche (im ersten Falle positive, im letztern entgegengesetzte) Sinus. Sind nun die Sinus der Winkel im ersten Quadranten gegeben, so sind sie es auch schon für die übrigen Quadranten.

Jener Theil des Durchmessers, der vom Anfangspunkt A bis zu jenem Punkte liegt, wo der Sinus den Radius schneidet, heißt Quersinus (sinus versus). Es ist demnach

AG = sin. v. ACB
AC = sin. v. ACO
AS = sin. v. ACH
AK = sin. v. ACK
AS = sin. v. AOKL ꝛc. . . .
AC = sin. v. AOKM ꝛc. . . .

Der Quersinus wächst also im ersten und zweiten Quadranten, und nimmt im dritten und vierten ab; seine Grenzen sind 0 und 2r = d (Durchmesser); er ist immer positiv.

§. 43.

Zieht man durch den Punkt A eine Tangente des Kreises (Fig. 17.), und verlängert sie, bis sie vom verlängerten Radius CB in D geschnitten wird, so heißt AD die Tangente des Winkels ACB oder Bogens AB; also AD = tg. a.

Wächst im ersten Quadranten der Winkel, so wächst auch die Tangente, und ist der Winkel ACO = R, so ist DA sowohl, als OC senkrecht auf AC, mithin DA # OC, und DA und OC schneiden sich nie; daher die Tangente des Winkels von 90° = ∞.

Für den Winkel im zweiten Quadranten ACH ist AQ Tangente; die Tangente nimmt also in diesem Quadranten ab, bis sie bei 180° = 0 wird; im dritten Quadranten wächt sie wieder bis ∞, und nimmt im vierten bis 0 ab. Die Grenzen der Tangenten sind also 0 und ∞.

§. 44.

Verlängert man den Radius BC, bis er die Tangente in D schneidet, so heißt CD die Sekante des Winkels ACB oder Bogens AB; also CD = sec. a. Ist der Winkel ein rechter, so können Tangente und Sekante, einander parallel, sich nicht schneiden, mithin die Sekante für einen Winkel von 90° = ∞.

Für den Winkel ACH im zweiten Quadranten ist CQ die Sekante; sie nimmt also von 90° bis 180° ab, und ist bei 180° dem Radius gleich; wächst von 180° bis 270° (= ∞), und nimmt von 270° bis 360° ab (= r).

Die Grenzen der Sekante sind also r und ∞.

§. 45.

Die bereits angeführten Linien sind es, welche bei Berechnung der ebenen und sphärischen Dreiecke statt der in Graden, Minuten ꝛc. gegebenen Winkel gesetzt werden. Unterdessen begnügt man sich nicht mit den trigonometrischen Linien eines Winkels, sondern nimmt auch eben diese Linien seines Ergänzungswinkels (Complementswinkels) zu Hilfe. Complementswinkel heißen nemlich zwei Winkel, die sich, additiv oder subtraktiv, zu 90° ergänzen. Es ist mithin

sin. 40° = sin. Compl. 50°

tg. 40° = tg. Compl. 50° ꝛc. . .

Diesen Sinus, Tangens, Secans, Sinus versus des Complementswinkels heißt man Cosinus, Cotangens, Cosecans, Cosinus versus für den gegebenen Winkel. Daß Sinus, tangens ꝛc. mit Cosinus, cotangens ꝛc. gleiche Grenzen haben, ist ohnehin einleuchtend; nur wollen wir die Lage des Cosinus in den vier Quadranten betrachten.

Es ist offenbar ACB (Fig. 17.) Complement zu BCO und umgekehrt; also nach obiger Bestimmung sin. ACB = Cos. BCO und, sin. BCO = Cos. ACB; es ist also Cos. ACB = BP = GC; wächst dieser Winkel, so nimmt der

Cosinus ab, und für einen Winkel von 90° ist der Cosinus = 0. Für den Winkel ACH ist HP Cosinus; im zweiten Quadranten wächst also der Cosinus, und wird bei 180° = r u. s. f.

Im zweiten und dritten Quadranten ist die Lage des Cosinus der Lage desselben im ersten und vierten entgegengesetzt; also im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten negativ.

Für den Winkel ACB ist OE Cotangente, CE Cosekante, OP Cosinus versus.

Ueber die Lage, so wie das Wachsen und Abnehmen dieser Linien später.

III. Grundformeln für die trigonometrischen Linien einfacher Winkel oder Bogen.

§. 46.

Setzen wir (Fig. 17.) den Winkel ACB = a, und den Radius des Kreises = 1, so ist

$$BC^2 = BG^2 + GC^2 \text{ d. i.}$$

$$1 = \sin.^2 a + \cos.^2 a \quad [1].$$

Daraus folgt:

$$\sin. a = \sqrt{1 - \cos.^2 a} \quad [2], \text{ und}$$

$$\cos. a = \sqrt{1 - \sin.^2 a} \quad [3].$$

Wenn also der $\left.\begin{matrix}\text{Cosinus}\\ \text{Sinus}\end{matrix}\right\}$ wächst, nimmt der $\left.\begin{matrix}\text{Sinus}\\ \text{Cosinus}\end{matrix}\right\}$ ab, und umgekehrt; wird $\left.\begin{matrix}\text{Sinus}\\ \text{Cosinus}\end{matrix}\right\} = 0$, so wird $\left.\begin{matrix}\text{Cosinus}\\ \text{Sinus}\end{matrix}\right\} = 1$.

Man hat ferner AG = AC — GC d. i.

$$\sin. v. a = 1 - \cos. a \quad [4], \text{ und}$$

$$OP = OC - PC \text{ d. i.}$$

$$\text{Cos. v. } a = 1 - \sin. a \quad [5].$$

Wenn daher der $\left.\begin{matrix}\text{Cosinus}\\ \text{Sinus}\end{matrix}\right\}$ wächst, nimmt der $\left.\begin{matrix}\text{Sinus v.}\\ \text{Cos. v.}\end{matrix}\right\}$ ab;

wird der $\left.\begin{matrix}\text{Cosinus}\\ \text{Sinus}\end{matrix}\right\} = 1$, so wird $\left.\begin{matrix}\text{Sin. v.}\\ \text{Cos. v.}\end{matrix}\right\} = 0$; ist $\left.\begin{matrix}\text{Cosinus}\\ \text{Sinus}\end{matrix}\right\} = 0$, so ist $\left.\begin{matrix}\text{Sin. v.}\\ \text{Cos. v.}\end{matrix}\right\} = 1$; und endlich ist $\left.\begin{matrix}\text{Cosinus}\\ \text{Sinus}\end{matrix}\right\} = -1$, so ist $\left.\begin{matrix}\text{Sin. v.}\\ \text{Cos. v.}\end{matrix}\right\} = 2$. Sinus v. und Cosinus v. sind immer positiv.

In den ähnlichen △△ BGC, DAC ist

$$GC : BG = AC : DA,$$ d. i.

$$\text{Cos.a} : \text{sin.a} = 1 : \text{tg.a};$$ daher

$$\text{tg.a} = \frac{\text{sin.a}}{\text{cos.a}} \quad [6].$$

Daraus folgt, daß die Tangente, rücksichtlich ihrer Größe, in geradem Verhältnisse mit dem Sinus, und umgekehrten mit dem Cosinus stehe.

Im ersten und dritten Quadranten haben Sinus und Cosinus gleiche Zeichen; also ist in diesen Quadranten die Tangente positiv; im zweiten und vierten aber negativ wegen der verschiedenen Zeichen des Sinus und Cosinus.

In dem △ DAC ist

$$DC^2 = AC^2 + AD^2,$$ d. i.

$$\text{sec.}^2\text{a} = 1 + \text{tg.}^2\text{a} \quad [7].$$

In den ähnlichen △△ BCP, ECO hat man

$$PC : PB = CO : OE,$$ d. i.

$$\text{sin.a} : \text{cos.a} = 1 : \text{cotg.a},$$ also

$$\text{cotg.a} = \frac{\text{cos.a}}{\text{sin.a}} \quad [8].$$

Die Cotangente steht also im umgekehrten Verhältnisse der Tangente, und hat mit ihr gleiche Zeichen. Daher ist

$$\text{cotg. } 90^\circ = \frac{\text{cos. } 90^\circ}{\text{sin. } 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{cotg.} 180^\circ = \frac{\text{cos.} 180^\circ}{\text{sin.} 180^\circ} = \frac{1}{0} = \infty \text{ etc.}$$

In dem $\triangle EOC$ ist

$$EC^2 = CO^2 + OE^2, \text{ d. i.}$$

$$\text{cosec.}^2 a = 1 + \text{cotg.}^2 a \; . \; [9].$$

In den ähnlichen $\triangle\triangle BGC$, DAC ist

$$GC : BC = AC : DC, \text{ d. i.}$$

$$\text{Cos.a} : 1 = 1 : \text{sec.a}; \text{ daher}$$

$$\text{sec.a} = \frac{1}{\text{cos.a}} \; [10].$$

Die Sekante steht also im umgekehrten Verhältnisse mit dem Cosinus, und hat mit ihm gleiche Zeichen; es ist sohin

$$\text{sec. } 0^0 = \frac{1}{\text{cos. } 0^0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{sec.} 90^0 = \frac{1}{\text{cos.} 90^0} = \frac{1}{0} = \infty \text{ rc....}$$

In den ähnlichen $\triangle\triangle BCP$, ECO hat man auch

$$PC : BC = OC : EC, \text{ d. i.}$$

$$\text{sin.a} : 1 = 1 : \text{cosec.a}; \text{ daher}$$

$$\text{cosec.a} = \frac{1}{\text{sin.a}} [11].$$

Die Cosekante steht also mit dem Sinus im umgekehrten Verhältnisse, und hat mit ihm gleiche Zeichen; es ist

$$\text{cosec. } 0^0 = \frac{1}{\text{sin. } 0^0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{cosec.} 90^0 = \frac{1}{\text{sin.} 90^0} = \frac{1}{1} = 1 \text{ rc..}$$

Die Grenzen der Cosekante sind, wie bei der Sekante 1 (r) und ∞.

Für den 5ten, 6ten rc. Quadranten sind die trigonometrischen Linien die nemlichen, wie für den ersten zweiten rc.

Negative Winkel haben im ersten, zweiten rc. Quadranten die nemlichen trigonometrischen Linien, wie positive Winkel im vierten, dritten rc..

Aus dem bisher Vorgetragenen läßt sich für Zeichen,

Grenzen, Ab= und Zunahme der trigonometrischen Linien in den vier Quadraten folgendes Schema entwerfen:

		I Q.	II Q.	III Q.	IV Q.
Sinus	nimmt	zu $0 - r$ $+$	ab $r - 0$ $+$	zu $0 - r$ $-$	ab $r - 0$ $-$
Cosinus	nimmt	ab $r - 0$ $+$	zu $0 - r$ $-$	ab $r - 0$ $-$	zu $0 - r$ $+$
Tangens	nimmt	zu $0 - \infty$ $+$	ab $\infty - 0$ $-$	zu $0 - \infty$ $+$	ab $\infty - 0$ $-$
Cotangens	nimmt	ab $\infty - 0$ $+$	zu $0 - \infty$ $-$	ab $\infty - 0$ $+$	zu $0 - \infty$ $-$
Secans	nimmt	zu $r - \infty$ $+$	ab $\infty - r$ $-$	zu $r - \infty$ $-$	ab $\infty - r$ $+$
Cosecans	nimmt	ab $\infty - r$ $+$	zu $r - \infty$ $+$	ab $\infty - r$ $-$	zu $r - \infty$ $-$
Sin. versus	nimmt	zu $0 - r$ $+$	zu $r - 2r$ $+$	ab $2r - r$ $+$	ab $r - 0$ $+$
Cosin. versus	nimmt	ab $r - 0$ $+$	zu $0 - r$ $+$	zu $r - 2r$ $+$	ab $2r - r$ $+$

IV. Formeln für trigonometrische Linien zusammengesetzter Winkel oder Bogen.

§. 47.

Im vorhergehenden §. wurden die Formeln für Sinus ꝛc. einfacher Winkel entwickelt; nun sollen auch die Sinus ꝛc. für zusammengesetzte Winkel aus den Sinusen ꝛc. einfacher Winkel, und umgekehrt, gefunden werden. Heißt der Winkel ACD (Fig. 18.) $= a$, DCE $= b$, so ist ACE $= a + b$,

und man hat $EM = \text{Sin.}\,(a + b)$; um $\text{Sin.}\,(a + b)$ zu bestimmen, ziehe man IF senkrecht auf EM, und IG senkrecht auf AC, so ist: $\text{Sin.}\,(a+b) = EM = EF + FM = EF + IG$; nun hat man in den ähnlichen Dreiecken DBC, IGC, IFE:

$IG : IC = DB : DC$, d. i.

$IG : \cos.b = \sin.a : 1$; also

$IG = \sin.a\ \cos.b$; ferner ist:

$EF : ED = BC : DC$, d. i.

$EF : \sin.b = \text{Cos.}a : 1$; also

$EF = \cos.a\ \sin.b$; daraus ergibt sich:

$$\text{Sin.}\,(a+b) = \sin.a\ \cos.b + \cos.a\ \sin.b \quad [12].$$

Es ist auch $MC = \cos.\,(a+b) = GC - GM = GC - IF$; man hat nun in den eben erwähnten ähnlichen Dreiecken:

$GC : IC = BC : DC$, d. i.

$GC : \cos.b = \cos.a : 1$; also

$GC = \cos.a\ \cos.b$; ferner ist:

$IF : ED = DB : DC$, d. i.

$IF : \sin.b = \sin.a : 1$; daher

$IF = \sin.a\ \sin.b$; daraus folgt:

$$\cos.\,(a+b) = \cos.a\ \cos.b - \sin.a\ \sin.b \quad [13].$$

Zus. Nimmt man in (12) und (13) b negativ, so erhält man $\sin.\,(a-b) = \sin.a\ \cos.b - \cos.a\ \sin.b$ [14], und

$$\cos.\,(a-b) = \cos.a\ \cos.b + \sin.a\ \sin.b \quad [15].$$

Beide Gleichungen lassen sich auch durch einfache geometrische Construktion finden.

§. 48.

Aus der Combination der bisher abgeleiteten 15 Formeln lassen sich noch mehrere, bei trigonometrischen Berechnungen sehr nothwendige, Formeln ableiten.

1. Setzen wir in (12) und (13) $a = b$, so ist

$$\sin.2a = 2\sin.a\ \cos.a \quad [16]$$

$$\cos.2a = \cos.^2a - \sin.^2a \quad [17].$$

Substituirt man in (17) für $\cos.^2 a$ und $\sin.^2 a$ die Werthe aus (2) und (3), so hat man

$$\cos.2a = 1 - 2\sin.^2 a \quad [18]$$

$$\cos.2a = 2\cos.^2 a - 1 \quad [19].$$

Aus (18) wird $\sin.a = \sqrt{\frac{1 - \cos.2a}{2}}$ [20], und

aus (19) $\cos.\ a = \sqrt{\frac{1 + \cos.2a}{2}}$ [21].

2. Setzen wir in (6) die gefundenen Werthe von (12), so hat man

$$\text{tg.}(a+b) = \frac{\sin.(a+b)}{\cos.(a+b)} = \frac{\sin.a\cos.b + \cos.a\sin.b}{\cos.a\cos.b - \sin.a\sin.b}.$$

Dividirt man im letzten Bruche Zähler und Nenner durch $\cos.a\ \cos.b.$, so ist

$$\text{tg.}(a+b) = \left(\frac{\sin.a\cos.b}{\cos.a\cos.b} + \frac{\cos.a\sin.b}{\cos.a\cos.b}\right) : \left(\frac{\cos.a\cos.b}{\cos.a\cos.b} - \frac{\sin.a\sin.b}{\cos.a\cos.b}\right)$$

$= (\text{tg.}a + \text{tg.}b) : (1 - \text{tg.}a\ \text{tg.}b)$. Also

$$\text{tg.}(a+b) = \frac{\text{tg.}a + \text{tg.}b}{1 - \text{tg.}a\,\text{tg.}b} \quad [22].$$

Durch ähnliche Substitution erhalten wir

$$\text{cotg.}(a+b) = \frac{1 - \text{tg.}a\,\text{tg.}b}{\text{tg.}a + \text{tg.}b} \quad [23].$$

Zus. 1. Nach (6) ist $\text{tg.}a = \frac{\sin.a}{\cos.a} = \left(\frac{\sin.a}{\sin.a}\right) : \left(\frac{\cos.a}{\sin.a}\right) =$

$1 : \text{cotg.}a = \frac{1}{\text{cotg.}a}$ [24], und eben so auch

$$\text{cotg.}a = \frac{1}{\text{tg.}a} \quad [25].$$

Zus. 2. Da $\cos.45° = \sin.45°$, so ist $\text{tg.}45° = 1$; daher $\text{tg.}(45°+b) = \frac{1 + \text{tg.}b}{1 - \text{tg.}b} = \cot.(45° - b)$ [26].

3. Setzen wir in (12) (13) (14) (15):

$$a + b = \mu$$
$$a - b = \varphi, \text{ so ist}$$
$$a = \tfrac{1}{2}(\mu + \varphi)$$
$$b = \tfrac{1}{2}(\mu - \varphi);$$

führen wir diese Werthe in (12) und (14) ein, so ist:

$$\sin.\mu + \sin.\varphi = 2 \sin.\tfrac{1}{2}(\mu + \varphi) \cos.\tfrac{1}{2}(\mu - \varphi) \quad [27].$$

$$\sin.\mu - \sin.\varphi = 2 \cos.\tfrac{1}{2}(\mu + \varphi) \sin.\tfrac{1}{2}(\mu - \varphi) \quad [28].$$

Diese Werthe eingeführt in (13) und (15), ergibt sich:

$$\cos.\mu + \cos.\varphi = 2 \cos.\tfrac{1}{2}(\mu + \varphi) \cos.\tfrac{1}{2}(\mu - \varphi) \quad [29]$$

$$\cos.\mu - \cos.\varphi = -2 \sin.\tfrac{1}{2}(\mu + \varphi) \sin.\tfrac{1}{2}(\mu - \varphi) \quad [30]$$

Wenn man (27) durch (28) nach (6) dividirt, so hat man:

$$\frac{\sin.\mu + \sin.\varphi}{\sin.\mu - \sin.\varphi} = \text{tg}.\tfrac{1}{2}(\mu + \varphi) \text{cotg}.\tfrac{1}{2}(\mu - \varphi).$$

$$= \frac{\text{tg}.\tfrac{1}{2}(\mu + \varphi)}{\text{tg}.\tfrac{1}{2}(\mu - \varphi)} \quad [31].$$

Aus der Division von (27) durch (29) erhält man:

$$\frac{\sin.\mu + \sin.\varphi}{\cos.\mu + \cos.\varphi} = \text{tg}.\tfrac{1}{2}(\mu + \varphi) \quad [32].$$

Auf ähnliche Weise könnte man mehrere solcher Formeln ableiten; doch reichen die bisher entwickelten zur Lösung der trigonometrischen Aufgaben hin.

V. Berechnung der trigonometrischen Linien.

§. 49.

Aus dem Begriffe der trigonometrischen Linien, ihrem Verhältnisse zum Radius, und aus den in den vorhergehenden §§. entwickelten Formeln läßt sich leicht zeigen, wie diese Linien für einen bestimmten Halbmesser (= 1) berechnet werden können. Ist PCN (Fig 18.) ein Quadrant, so ist, wenn man PN zieht, $PN^2 = PC^2 + CN^2 = 2PC^2$;

also PN $= \sqrt{2}$; halbirt man PCN durch CQ, so ist W. PCQ $= 45°$; und dessen Sinus PV $= \frac{1}{2}$PN $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$; also Sin. $45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} =$ Cos. $45°$. Ist RS die Seite eines regulären Sechseckes, und CN auf ihr senkrecht, so ist RCN $= \frac{1}{2}60° = 30°$; und RT $= \frac{1}{2} =$ sin. RCN; man hat also sin. $30° = \frac{1}{2} =$ cos. $60°$, der einzige rationale Sinus außer dem Sinus totus.

Aus sin. $30°$ läßt sich nach (3) cos. $30°$, und daraus nach (20) sin. $15°$, sin. $7° 30'$, sin. $3° 45'$ finden.

Hat man (Fig. 18.) SZ als Seite eines regulären Zehnecks im Kreise, so ist ZCS $= 36°$; also CZS $=$ CSZ $= 72°$; verlängert man SZ bis X, daß ZX $=$ ZC wird, so ist ZXC $=$ ZCX $= \frac{1}{2}$CZS $= 36°$; mithin $\triangle CSZ \sim \triangle CSX$; daher

$$CS : SZ = SX : CS, \text{ d. i.}$$

$$1 : SZ = 1 + SZ : 1; \text{ daraus}$$

$$SZ^2 + SZ = 1;$$ durch Auflösung dieser Gleichung erhält man SZ $= \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; es ist aber $\frac{1}{2}$ SZ $=$ Sin. $18°$; also sin. $18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; daraus läßt sich nach (3) und (20) sin. $9°$, sin. $4° 30'$, sin. $2° 15'$ berechnen.

Aus sin. $3° 45'$ und sin. $2° 15'$ findet man nach (12) und (14) sin. $6°$ und sin. $1° 30'$; aus diesem letztern endlich sin. $45'$. Auf die nemliche Weise findet man sin. $\frac{45'}{2}$, sin. $\frac{45'}{4}$, sin. $\frac{45'}{8}$, sin. $\frac{45'}{16}$, sin. $\frac{45'}{32}$, sin. $\frac{45'}{64}$ ꝛc... Da aber bei so kleinen Winkeln die Bogen für die Sinus gesetzt werden können, so hat man $\frac{45}{64} : 1 =$ sin. $\frac{45'}{64}$: sin. $1'$, woraus sin. $1' =$ sin. $\frac{45'}{64} \times \frac{64}{45}$.

Ist für eine Minute der Sinus gefunden, so lassen sich

nach den oben aufgestellten Formeln alle trigonometrischen Linien von Minute zu Minute von 0° bis 90° berechnen, welche dann auch mit gehöriger Rücksicht auf Zeichen für die übrigen Quadranten gelten.

Da aus dem Begriffe der trigonometrischen Linien und der Aehnlichkeit der Dreiecke hervorgeht, daß für gleiche Winkel die Sinuse sich verhalten, wie die Radien der entsprechenden Kreise, so kann man die für den Halbmesser 1 berechneten Sinuse ꝛc. leicht auf jeden andern Radius zurückführen.

In den Tafeln, in welchen die trigonometrischen Linien berechnet enthalten sind, ist der Radius = 10000000000 angenommen, und weil gewöhnlich nur die Logarithmen der Linien angegeben sind, so ist log. r = 10; setzt man also r = 1, so ist log. r = 0, und in diesem Falle muß von jedem Logarithmus der Tafel 10 abgezogen werden.

Wie man in den Tafeln für einen gegebenen Winkel dessen Sinus ꝛc., und umgekehrt finden könne, bleibt dem mündlichen Unterrichte vorbehalten.

VI. Berechnung der ebenen Dreiecke.

§. 50.

In jedem Dreiecke sind 6 Stücke, 3 Seiten und 3 Winkel, und da aus drei gegebenen Stücken die übrigen berechnet werden können, sechs Elemente aber 15 Combinationen nach vier geben, so sind im Ganzen 15 Auflösungen möglich, die sich aber bei genauer Betrachtung auf 3 Hauptfälle zurückführen lassen, je nachdem gegeben ist:

a) eine Seite und zwei Winkel;
b) zwei Seiten und ein Winkel;
c) drei Seiten.

Der Fall, daß zur Berechnung des Dreiecks drei Winkel gegeben sind, gehört unter a, indem man die dem klein-

sten Winkel gegenüberliegende Seite = 1 setzt, wodurch die übrigen Seiten verhältnißmäßig sich ergeben.

Wir bezeichnen durchaus die Winkel eines Dreiecks mit großen Buchstaben, und die den Winkeln gegenüberliegenden Seiten mit den nemlichen kleinen Buchstaben. Im rechtwinklichen Dreiecke heißt der rechte Winkel H, und daher die Hypotenuse h.

§. 51.

a) Es ist gegeben: eine Seite und zwei Winkel. Der dritte Winkel findet sich unmittelbar aus geometrischen Gründen als Supplement zu den zwei gegebenen; um auch die beiden Seiten zu finden, ziehe man im Dreiecke ABC (Fig. 19.) das Perpendikel BD, so wissen wir aus Geometrie:

$$\triangle ABC = \frac{AC \,.\, BD}{2} = \frac{b \,.\, BD}{2}$$

Es ist aber im $\triangle ABD$:

$AB : BD = r : \sin. A$, d. i.

$c : BD = 1 : \sin. A$, also

$BD = c \sin. A$.

Durch Substitution des Werthes BD erhalten wir also.

$$\triangle ABC = \frac{bc \sin. A}{2}.$$

Durch Analogie hat man auch:

$$\triangle ABC = \frac{ac \sin. B}{2}, \text{ und}$$

$$\triangle ABC = \frac{ab \sin. C}{2};$$

daher $\frac{bc \sin. A}{2} = \frac{ac \sin. B}{2}$, und

$b \sin. A = a \sin. B$, oder

$a : b = \sin. A : \sin. B$; eben so ist

$$\frac{ac\ \sin.B}{2} = \frac{ab\ \sin.C}{2},\ \text{und}$$

$$c\sin.B = b\sin.C,\ \text{oder}$$

$$c : b = \sin.C : \sin.B\ \text{(I)},\ \text{d. h.}$$

die Seiten eines Dreiecks verhalten sich, wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel, nach welchem Satze sich die beiden andern Seiten finden lassen.

Zus. 1. Ist A = R = H, so ist Sin. A = 1, dann wird auch Sin. B = Cos. C und Sin. C = Cos. B, und es ergibt sich aus obiger Formel:

$$h : b = 1 : \sin.B = 1 : \text{Cos}.C$$

$$h : c = 1 : \sin.C = 1 : \text{Cos}.B,\ \text{d. h.}$$

Im rechtwinklichen Dreiecke verhält sich die Hypotenuse zu einer Kathete, wie der Radius zum Sinus des der Kathete gegenüberliegenden, oder zum Cosinus des der Kathete anliegenden Winkels, und man hat:

$$b = h\sin.B = h.\text{Cos}.C\ \text{und}$$

$$c = h\sin.C = h\text{Cos}.B;\ \text{eben so}$$

$$h = \frac{c}{\sin.C} = \frac{c}{\cos.B};\quad \sin.B = \frac{b}{h} = \cos.C\ \text{und}$$

$$\sin.C = \frac{c}{h} = \cos.B\ \text{(II)}.$$

Zus. 2. Ist A = R, so ist auch:

$$b : c = \cos.C : \sin.C = 1 : \frac{\sin.C}{\cos.C}\ \text{oder}$$

$$b : c = 1 : \text{tg}.C;\ \text{eben so}$$

$$b : c = 1 : \text{cotg}.B\ \text{(III)},\ \text{d. h.}$$

im rechtwinklichten Dreiecke verhält sich eine Kathete zur andern, wie der Radius zur Tangente des der letztern Kathete gegenüberlie-

genden, oder zur Cotangente des der letztern Seite anliegenden Winkels. Es ist also

$$c = b \,.\, tg.\, C = b \,.\, cotg.\, B;$$ eben so

$$tg.C = \frac{c}{b} = cotg.\, B.$$

Aus den Formeln II und III lassen sich alle Aufgaben über rechtwinkliche Dreiecke lösen.

§. 52.

b) Es ist gegeben: zwei Seiten und ein Winkel. Ist der gegebene Winkel einer der gegebenen Seiten gegenüberliegend, so reicht die Formel I zur Bestimmung der übrigen Stücke hin; nur muß, wenn nicht der der größern Seite gegenüberliegende Winkel gegeben ist, schon bekannt seyn, ob das Dreieck spitz- oder stumpfwinklich ist. Ist der gegebene Winkel von den gegebenen Seiten eingeschlossen, so kann gesucht werden:

α) die dritte Seite,

β) die beiden andern Winkel.

α) Um die dritte Seite zu finden, ist im △ ABC (Fig. 19.)

$$AB : AD = r : cos.\, A,$$ d. i.

$$c : AD = 1 : cos.\, A,$$ also

$$AD = c\, cos.\, A.$$ Eben so ist

$$BC : CD = r : cos.\, C,$$ d. i.

$$a : CD = 1 : cos.\, C,$$ und

$$CD = a \,.\, cos.\, C.$$

Da aber $AC = b = AD + DC$, so ist

$$b = a\, cos.\, C + c\, cos.\, A;$$ analog ergibt sich:

$$a = b\, cos.\, C + c\, cos.\, B$$

$$c = a\, cos.\, B + b\, cos.\, A.$$

Multiplizirt man die erste Gleichung mit b, die zweite mit a, und die dritte mit c, und zieht die zwei letztern von der erstern ab, so ergibt sich:

$$b^2 - a^2 - c^2 = -2ac\cos.B\text{, also}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos.B\text{; analog ist:}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos.A\text{, und}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\mathrm{Cos}.C \quad \text{(IV)}.$$

Sind also in einem Dreiecke zwei Seiten, z. B. a, c und der eingeschlossene Winkel B gegeben, so findet man b^2, also auch b; die beiden Winkel ergeben sich dann aus I.

Jedoch ist die Formel IV zur logarithmischen Behandlung nicht geeignet; daher kann folgende Umwandlung vorgenommen werden. Es ist nemlich

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - 2bc - 2bc\cos.A$$
$$= (b+c)^2 - 2bc(1+\cos.A)$$
$$= (b+c)^2 - 2bc.2\cos.^2\tfrac{1}{2}A \ (21)$$
$$a^2 = (b+c)^2 - 4bc.\cos.^2\tfrac{1}{2}A.$$

Setzen wir $4bc\cos.^2\frac{1}{2}A = \varphi^2$ also

$\varphi = 2\cos.\frac{1}{2}A\sqrt{bc}$; so haben wir

$$a^2 = (c+b)^2 - \varphi^2$$
$$= (c+b+\varphi)(c+b-\varphi)\text{: also}$$

$a = \sqrt{(c+b+\varphi)(c+b-\varphi)}$; woraus a logarithmisch gefunden wird. Analog wird b, oder c mit gehöriger Berücksichtigung des Werthes von φ gefunden.

β) Um die beiden andern Winkel unmittelbar aus dem Gegebenen zu suchen, haben wir nach I:

$a : b = \sin.A : \sin.B$; also auch

$a+b : a-b = \sin.A + \sin.B. : \sin.A - \sin.B$, d. i.

$a+b : a-b = 2\sin.\frac{1}{2}(A+B)\cos.\frac{1}{2}(A-B) : 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin.\frac{1}{2}(A-B)$: (27) (28);

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2\sin.\frac{1}{2}(A+B)\cos.\frac{1}{2}(A-B)}{2\cos.\frac{1}{2}(A+B)\sin.\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}(A+B)\,\mathrm{cotg}.\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\mathrm{tg}.\frac{1}{2}(A+B)}{\mathrm{tg}.\frac{1}{2}(A-B)}\text{; d. i.}$$

$$a+b : a-b = \mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}(A+B) : \mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}(A-B) \quad \text{(V), d. h.}$$

in jedem Dreiecke verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe zur Tangente der halben Differenz der den Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Sind also in einem Dreiecke zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, so weiß man aus Geometrie die Summe der beiden fehlenden Winkel; die halbe Differenz finden wir aus V; und durch Addition der halben Summe und halben Differenz findet man den größern, durch Subtraktion aber den kleinern Winkel; die dritte Seite läßt sich dann nach I finden.

Zus. Wollten wir unmittelbar aus dem Gegebenen (nach β) einen Winkel finden, so ist im $\triangle$ ABC (Fig. 19.)

$BD = c \sin. A$

$AD = c \cos. A$

$DC = b - c \cos. A$; ferner hat man:

$DC : BD = 1 : tg. C$; d. i.

$b - c \cos. A : c \sin. A. = 1 : tg. C$; daher

$$tg. C = \frac{c \sin. A}{b - c . \cos. A}, \text{ und analog}$$

$$tg. B = \frac{b \sin. A}{c - b \cos. A} \quad (VI)$$ woraus sich W. B oder C finden läßt.

§. 53.

c) Es ist gegeben: drei Seiten. Zur Auflösung dieses Falles finden wir unmittelbar aus IV:

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 bc}.$$ Es ist aber nach (2)

$$\sin. A = \sqrt{1 - \cos.^2 A} = \sqrt{(1 + \cos. A)(1 - \cos. A)}$$

Nun ist $1 + \cos. A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 bc} = \frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{2 bc} =$

$$\frac{(b + c)^2 - a^2}{2 bc} = \frac{(a + b + c)(b + c - a)}{2 bc}.$$

Auf gleiche Weise finden wir

$$1 - \cos. A = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{2\,bc}\text{; daher}$$

$$\sin. A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2\,bc}\ \text{(VII)}.$$

Mit gehöriger Berücksichtigung des Nenners erhalten wir aus der nemlichen Formel die Werthe für sin. B, sin. C.

Zus. 1. Um größere Einfachheit zu erhalten, setzen wir nach (20) in

$$\sin.\tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \cos. A}{2}}$$ den oben für 1 — cos. A gefundenen Werth; dann ist

$$\sin.\tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{bc}}\ \text{(VIII)},$$

und analog haben wir

$$\sin.\tfrac{1}{2} B = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(b+a-c)(b+c-a)}{ac}}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2} C = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(c+a-b)(c+b-a)}{ab}}.$$

Nach (21) ist

$$\cos.\tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 + \cos. A}{2}}\text{; daher}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}}\ \text{(IX)},$$

woraus die analogen Fälle sich leicht ergeben.

Zus. 2. Durch Division von VIII durch IX hat man:

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{(a+b+c)(b+c-a)}}\ \text{(X)},$$

woraus ebenfalls tg. $\frac{1}{2}$ B, tg. $\frac{1}{2}$ C analog bestimmt wird.

Die Formeln VIII und IX sind zur numerischen Behandlung die einfachsten.

VII. Flächenberechnung des Dreiecks nach den Congruenzfällen.

§. 54.

a) Gegeben: eine Seite und zwei Winkel.

Es ist (Fig. 19) $\triangle ABC = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{b \cdot BD}{2}$.

Es ist aber $BD = c \sin. A$, und da

$b : c = \sin. B : \sin. C$, so ist auch

$c = \frac{b \sin. C}{\sin. B}$, also $BD = \frac{b \sin. A \cdot \sin. C}{\sin. B}$; daher

$$\triangle ABC = \frac{b^2 \sin. A \sin. C}{2 \sin. B} = \frac{b^2 \sin. A \sin. C}{2 \sin. (A + C)}$$

$= \frac{b^2 \sin. A \sin. (A + B)}{2 \sin. B}$. Die analogen Fälle ergeben sich von selbst.

b) Gegeben: zwei Seiten und ein Winkel.

Hier ist $\triangle ABC = \frac{b \cdot c \sin. A}{2} = \frac{ab \sin. C}{2} = \frac{ac \sin. B}{2}$.

c) Gegeben: drei Seiten: Es ist

$\triangle ABC = \frac{b . c \sin. A}{2}$. Setzen wir statt sin. A den Werth (VII), so ist

$$\triangle ABC = \frac{bc}{2} \times \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2bc}, \text{ also}$$

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)},$$

wie auch in der Geometrie schon gezeigt worden ist.

§. 55.

Aufgaben. 1. In einem rechtwinklichen Dreiecke (Fig. 20) sey eine Kathete $b = 338'$, die andere Kathete $a = 275'$; gesucht die Hypotenuse h, und die beiden andern Winkel B, A.

Auflösung. Die Hypotenuse ergibt sich aus:

$$h = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{338^2 + 275^2}.$$

Nun ist log. 338 = 2.5289167

$$\frac{\quad 2}{5.0578334} = \log. 114244$$

log. 275 = 2.4393327

$$\frac{\quad 2}{4.8786654} \log. 75625, \text{ also}$$

$$h = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{189869} = 435{,}7'.$$

Um den Winkel B zu finden, haben wir nach (III):

$$tg. B = \frac{b}{a}; \text{ also}$$

$$\log. tg. B = \log. b - \log. a$$
$$= 2.5289167$$
$$- 2.4393327$$
$$0.0895840 + 10 = \log. tg. 50^\circ 52' 5'';$$

mithin auch Winkel A (als Complement von B) = 39° 7′ 55″.

2. In einem rechtwinklichen Dreiecke (Fig. 20) sey die Hypotenuse h = 560′; ein spitzer Winkel A = 36° 27′; das Uebrige werde gesucht.

Auflösung. Der Winkel B = 53° 33′; um die Kathete a zu finden, haben wir nach (II)

$$a = h \sin. A; \text{ daher}$$

$$\log. a = \log. h + \log. \sin. A;$$
$$= 2.7481880$$
$$+ 9.7738749 - 10$$
$$2.5220629 = \log. 332{,}7 = \log. a;$$

ferner: b = h . sin. B, also

$$\log. b = \log. h + \log. \sin. B.$$
$$= 2.7481880$$
$$+ 9.9054589 - 10$$
$$2.6536469 = \log. 450{,}45 = \log. b.$$

3. In einem rechtwinklichen Dreiecke (Fig. 20) sey die Hypotenuse h = 460′; eine Kathete b = 380′; das Uebrige werde gesucht!

Auflösung. Die andere Kathete $a = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{460^2 - 380^2} = 259{,}2$; jedoch könnte sie auch trigonometrisch gefunden werden.

Um den spitzen Winkel B zu finden, haben wir nach II:

$$\sin. B = \frac{b}{h}, \text{ daher}$$

$$\begin{aligned} \log. \sin. B &= 2.5797836 + 10 \\ &\quad - 2.6627578 \\ \hline &\quad 9.9170258 = \log. \sin. 55^\circ\ 41' \end{aligned}$$

beinahe; daher $A = 34^\circ\ 18'$.

4. In einem rechtwinklichen Dreiecke sey eine Kathete (Fig. 20) $a = 142'$; der spitze Winkel $B = 54^\circ\ 30'$; das Uebrige werde gesucht.

Auflösung. Der spitze Winkel A ist $35^\circ\ 30'$; um die Kathete b zu suchen, haben wir aus (III)

$$b = a \text{ tg. } B; \text{ also}$$

$$\begin{aligned} \log. b &= \log. a + \log. \text{tg. } B; \\ &= 2.1522883 \\ &+ 10.1467320 - 10 \\ \hline &\quad 2.2990203 = \log. 199 = \log. b. \end{aligned}$$

Die Hypotenuse sucht man entweder geometrisch, oder aus (II) durch:

$$h = \frac{b}{\sin. B}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} \log. h &= \log. b - \log. \sin. B. \\ &= 2.2990203 \\ &\quad -(9.9106860 - 10) \\ \hline &\quad 2.3883343 = \log. 244{,}5. \end{aligned}$$

5. Die Entfernung des nördlichen Frauenthurmes in München vom Thurme in Aufkirchen bei Erding beträgt 97,611 bayerische Fuß; nimmt man zu diesen 2 Punkten das Schloß in Dachau, und verbindet diese drei Punkte

durch gerade Linien, so entsteht ein Dreieck, in welchem der Winkel bei München = 86° 21′ 17″, der Winkel bei Aufkirchen 31° 39′ 42″ beträgt; wie groß ist die Entfernung von München nach Dachau, und von Dachau nach Aufkirchen?

Auflösung. Es sey (Fig. 19) in A München, in B Dachau, in C Aufkirchen, so hat man:

A = 86° 21′ 17″
C = 31° 39′ 42″; also
B = 61° 59′ 1″ und
b(AC) = 97611; gesucht werde
c (AB) und a (BC), so ist nach I
b : c = sin. B : sin. C; oder
97611 : c = sin. 61° 59′ 1″ : sin. 31° 36′ 42″;
log.c = log.97611 + log.sin.31° 39′ 42″ — log.sin.61° 59′ 1″
= 4.9894988
+ 9.7200784

14.7095772
— 9.9458688

4.7637084 = log. 58037,45.

Mithin beträgt die Entfernung Münchens von Dachau 58037 Fuß.

Es ist auch nach I

b : a = sin. B : sin. A

$$a = \frac{b \cdot \sin. A}{\sin. B}; \text{ also}$$

log.a = log.97611 + log.sin.86° 21′ 17″ — log.sin.61° 59′ 1″
= 4.9894988
+ 9.9991204

14.9886192
— 9.9458688

5.0427504 = log. 110344,5;

welche letztere Zahl die Entfernung Aufkirchens von Dachau angibt.

6. München ist entfernt vom hohen Peißenberge 162685 bayerische Fuß; vom Wendelsteine 169160 Fuß; beide Distanzlinien bilden in München einen Winkel von 82° 29′; man bestimme die Entfernung des Peißenberges vom Wendelsteine, nebst den beiden anliegenden Winkeln!

Auflösung. Es sey (Fig. 19) A München, B Wendelstein, C Peißenberg; so ist:

$$A = 82^\circ\ 29'.$$
$$b\ (AC) = 162685.$$
$$c\ (AB) = 169160.$$

gesucht werde a, B, C.

Wir finden a zunächst aus IV nach der Umformung $\varphi = 2\cos.\tfrac{1}{2}A\sqrt{bc}$ und

$$a = \sqrt{(b + c + \varphi)(b + c - \varphi)}.$$

Nun ist

$$\log.\varphi = \log.2 + \log.\text{Cos}.\,41^\circ\ 14'\ 30'' + \frac{\log.b + \log.c}{2}$$

$$= 0.3010300$$
$$9.8761807 - 10$$
$$\overline{9.1772137}$$
$$\log.b = 5.2113476$$
$$\log.c = 5.2282977$$
$$\frac{10.4396453}{2} = 5.2198226;$$

also $\log.\varphi = 5.3970363 = \log.249480.$

Daher $\log.a = \dfrac{\log.581325 + \log.82365}{2}$

$$= 5.7644190$$
$$4.9157427$$
$$\overline{10.6801617} = 5.3400808 =$$
$$:2$$

log. = 218817, die Entfernung Peißenbergs vom Wendelstein.

Um die Winkel B, C zu finden, haben wir nach V:

$c + b : c - b = \text{tg.} \tfrac{1}{2}(C + B) : \text{tg.} \tfrac{1}{2}(C - B)$; d. i.

$331845 : 6475 = \text{tg.}\, 48^\circ\, 45'\, 30'' : \text{tg.}\, x$; daher

$$\log.\,\text{tg.}\,x = \log.\,6475 + \log.\,\text{tg.}\,48^\circ\,45'\,30'' - \log.\,331845$$

$$\begin{array}{r} = 3.8112398 \\ + 10.0571395 \\ \hline 13.8683793 \\ - 5.5209353 \\ \hline 8.3474440 \end{array}$$

$8.3474440 = \log.\,\text{tg.}\,1^\circ\,16'\,30''$ beinahe;

daher $C = 50^\circ\, 2'$ und $B\ 47^\circ\, 29'$.

7. Die drei Seiten eines Dreiecks sind 483′, 509′ 598′; man finde daraus die drei Winkel und den Quadratinhalt.

Auflösung. Um die Winkel zu bestimmen, sey (Fig. 19.) $a = 483'$, $b = 509'$, $c = 598'$; so hat man nach VIII:

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{bc}}, \text{ d. i.}$$

$$\log.\sin.\tfrac{1}{2}A = \frac{\log.394 + \log.572 - \log.509 - \log.598}{2} - \log.2$$

$$\begin{array}{rr} \log.394 = & 2.5954962 \\ \log.572 = & 2.7573960 \\ \hline & 5.3528922 \\ -\log.509 = & -2.7067178 \\ -\log.598 = & -2.7767012 \\ \hline & = -5.4834190 \\ \hline & 1.8694732 - 2 \\ & :2 \end{array}$$

$$= 0.9347366 - 1$$

$$\text{Compl. dec. log. } 2 = 9.6989700 - 10$$

$$\overline{10.6337066 - 11 + 10 =}$$

$9.6337066 = \log. \sin. 25^\circ\ 28'\ 57''$;
also $A = 50^\circ\ 57'\ 54''$.

Um B zu finden, haben wir nach I:

$a : b = \sin. A : \sin. B$; daraus

$$\log. \sin. B = \log. b + \log. \sin. A - \log. a$$

$$\begin{array}{r} = 2.7067178 \\ 9.8902877 \\ \hline 12.5970055 \\ - 2.6839471 \\ \hline 9.9130584 \end{array} = \log. \sin. 54^\circ\ 56'\ 32''.$$

Daher auch $C = 180^\circ - (A + B) = 74^\circ\ 5'\ 34''$.

Um den Quadratinhalt zu finden, hat man nach §. 54. c.

$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$; daher

$$\log.\Delta = \frac{\log. 1590 + \log. 624 + \log. 572 + \log. 394}{2} - \log. 4$$

$$\begin{array}{r} = 3.2013971 \\ 2.7951846 \\ 2.7573960 \\ 2.5954962 \\ \hline 11.3494739 \\ :2 \end{array} = \begin{array}{r} 5.6747369 \\ - 0.6020600 \\ \hline 5.0726769 \end{array} = \log. 118216.$$

Also der Quadratinhalt des Dreiecks 118216 □Fuß.

VIII. Berechnung der sphärischen Dreiecke.

§. 56.

Wenn sich (Fig. 21.) zwei größte Kugelkreise PQDROM und PNERFG schneiden, so halbiren sie einander und bilden einen Neigungswinkel DCE = W.$\beta P \gamma$, den zwei auf die beiden Peripherien der Kugelkreise durch P gezogene Tangenten bilden; dieser Winkel ist auch gleich dem Winkel, den die Bogen der Kreise PD, PE in P bilden; welcher

Winkel ein sphärischer Winkel heißt. Werden die beiden größten Kreise noch durch einen dritten Kreis BDAGN geschnitten, so schneidet dessen Peripherie die beiden andern Peripherien in den Punkten E, D ꝛc...; es wird also durch die drei Bogen PD, PE, DE auf der Kugel ein Raum eingeschlossen, welcher sphärisches Dreieck heißt. Hier wird der Bogen PD gemessen durch den Winkel PCD, PE durch den Winkel PCE, also durch den Winkel den zwei Radien, zu den Endpunkten des Bogens gezogen, im Mittelpunkte bilden; mithin lassen sich auch die Seiten sphärischer Dreiecke, wie ihre Winkel, durch ebene Winkel darstellen.

Ist der Bogen PD, PE ein Quadrant, so ist P der Pol des Bogens DE, und der Winkel DPE ist gleich dem Bogen DE; ist der sphärische Winkel PDE ein rechter, so heißt im Dreiecke die gegenüberliegende Seite PE die Hypotenuse. auch im sphärischen Dreiecke bezeichnen wir die Winkel durch große, die entgegenstehenden Seiten durch die nemlichen kleinen Buchstaben. Der rechte Winkel wird bezeichnet durch H, die Hypotenuse durch h.

§. 57.

Verlängern wir im sphärischen Dreiecke ABC, BA, BC, bis M, N, so daß BM = 90° = BN, eben so auch CO = 90° = CQ, und AP = 90° = AK; und legen durch KP, OQ, NM Bogen größter Kreise, die sich schneiden in E, D, F, so entsteht ein Dreieck EDF, und man hat nach der im vorigen §. angenommenen Bezeichnung: E der Pol für b, F der Pol für c und D der Pol für a; man heißt also das Dreieck DEF, das Polardreieck von BAC; eben so ist B der Pol von e, C der Pol von f, und A der Pol von d; also auch ABC das Polardreieck von DEF. Nun ist aber nach der Construktion:

$$MA + AB = 90^\circ = AB + BK; \text{ also}$$
$$MA + AB + BK + AB = 180^\circ;$$
$$MK + AB = 180^\circ, \text{ d. i.}$$

$F + c = 180°$; auf gleiche Weise ist
$E + b = 180°$, und
$D + a = 180°$.

Es ist ferner:

$DM + MN = 90° = MN + NF$; also
$DM + MN + NF + MN = 180°$; oder
$DF + MN = 180°$, d. i.
$e + B = 180°$; auf gleiche Weise ist
$d + A = 180°$, und
$f + C = 180°$; d. h.

in einem sphärischen Dreiecke sind die Seiten die Supplemente der Winkel des Polardreiecks, und die Winkel die Supplemente der Seiten des Polardreiecks; man hat also auch $\text{Sin. } e = \text{Sin. } B$ rc. .

$\text{Cos. } e = - \text{Cos. } B$ rc. . .

§. 58.

In einem sphärischen Dreiecke sind drei Seiten und drei Winkel; da nun aus drei dieser sechs Stücke jedes vierte durch Rechnung gefunden werden kann, 6 Elemente aber 15 Combinationen nach 4 geben, so haben wir im Ganzen 15 Fälle, die sich jedoch auf folgende 4 zurückführen lassen, je nachdem gegeben ist:

a) drei Seiten,
b) drei Winkel,
c) zwei Seiten und ein Winkel,
d) zwei Winkel und eine Seite.

§. 59.

a) In einem sphärischen Dreiecke sind gegeben: drei Seiten.

Es sey (Fig. 23.) ABC das gegebene sphärische Dreieck; D sey der Mittelpunkt der Kugel, auf deren Oberfläche das Dreieck beschrieben ist; man ziehe nun die Radien DA, DB, DC; verlängern wir den Radius DB bis E, wo er von

der Tangente des Bogens AB geschnitten wird, so ist AE = tg. c, und DE = sec. c.

Verlängern wir DC bis F, wo er von der Tangente des Bogens AC geschnitten wird, so ist AF = tg. b, DF = sec. b; und man hat nach (IV) in den △△ EAF, EDF:

$$EF^2 = EA^2 + AF^2 - 2\,EA\,.\,AF\,.\,\cos.A, \text{ und}$$

$$EF^2 = ED^2 + DF^2 - 2\,ED\,.\,DF\,.\,\cos.BC; \text{ daher}$$

$EA^2 + AF^2 - 2EA\,.\,AF\,.\,\cos.A = ED^2 + DF^2 - 2ED\,.\,DF.\cos.a$, d. i.

$$tg.^2c + tg.^2b - 2tg.c.\,tg.b\cos.A = sec.^2c + sec.^2b - 2sec.c\,sec.b\cos.a.$$

$$sec.^2c - tg.^2c + sec.^2b - tg^2b = 2sec.c\,sec.b\cos.a - 2tg.b\,tg.c\cos.A.$$

$$1 + 1 = 2\,.\,\frac{1}{\cos.c}\,.\,\frac{1}{\cos.b}\,.\cos.a - 2\,.\,\frac{\sin.b}{\cos.b}\,.\,\frac{\sin.c}{\cos.c}\,.\cos.A.$$

(6. 7. 10)

$$2 = \frac{2\cos.a}{\cos.c\,\cos.b} - \frac{2\sin.b'.\sin.c\,.\cos.A}{\cos.b\,\cos.c}.$$

$\cos.b\,\cos.c = \cos.a - \sin.b\,\sin.c\,\cos.A$, und daraus ergibt sich:

$$\cos.A = \frac{\cos.a - \cos.b\,\cos.c}{\sin.b\,\sin.c}; \text{ analog ist:}$$

$$\cos.B = \frac{\cos.b - \cos.a\,\cos.c}{\sin.a\,\sin.c} \quad \text{(XI. 1.)}$$

$$\cos.C = \frac{\cos.c - \cos.a\,\cos.b}{\sin.a\,\sin.b}$$

Nach voranstehender Gleichung lassen sich also aus drei gegebenen Seiten die Winkel finden; um sie logarithmisch umzuformen, setzen wir nach (20) $2\sin.^2\frac{1}{2}A = 1 - \cos.A$; also

$$2\sin.^2\tfrac{1}{2}A = 1 - \left(\frac{\cos.a - \cos.b\,\cos.c}{\sin.b\,\sin.c}\right)$$

$$= \frac{\sin.b\,\sin.c + \cos.b\,\cos.c - \cos.a}{\sin.b\,\sin.c}$$

$$= \frac{\cos.(b-c) - \cos.a}{\sin.b\,\sin.c} \quad (15)$$

$$2\sin.^2\tfrac{1}{2}A = \frac{2\sin.\frac{1}{2}(a+b-c)\sin.\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin.b.\,\sin.c} \quad \text{(30), also}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b-c)\sin.\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin.b\sin.c}} \quad \text{(XI. 2.)}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b-c)\sin.\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin.a\sin.c}}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+c-b)\sin.\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin.a\sin.b}}.$$

Führen wir in die Gleichung (XI. 1.) den Werth $2\cos.^2\tfrac{1}{2}A = 1+\cos.A$ (21) ein, so hat man:

$$2\cos.^2\tfrac{1}{2}A = 1+\frac{\cos.a-\cos.b\cos.c}{\sin.b\sin.c}$$

$$= \frac{\sin.b\sin.c-\cos.b\cos.c+\cos.a}{\sin.b\sin.c}$$

$$= \frac{\cos.a-\cos.(b+c)}{\sin.b\sin.c}\ (13)$$

$$2\cos.^2\tfrac{1}{2}A = \frac{2\sin.\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin.\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin.b\sin.c}\ (30),\ \text{also}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin.\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin.b.\sin.c}} \quad \text{(XI. 3.)}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin.\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin.a.\sin.c}}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin.\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin.a\,.\sin.b}}.$$

Dividirt man mit (XI. 3.) in (XI. 2.), so hat man

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b-c)\sin.\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin.\tfrac{1}{2}(b+c-a)}} \quad \text{(XI. 4.)}$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b-c)\sin.\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin.\tfrac{1}{2}(a+c-b)}}$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+c-b)\sin.\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin.\tfrac{1}{2}(a+b-c)}}.$$

Damit in (XI. 2.) $\sin.\tfrac{1}{2}A$, $\sin.\tfrac{1}{2}B$, $\sin.\tfrac{1}{2}C$ nicht imaginär werde, muß $a+b>c$, $b+c>a$ und $a+c>b$ seyn, d. h. in jedem sphärischen Dreiecke ist die

Summe zweier Seiten größer, als die dritte Seite.

§. 60.

b) In einem sphärischen Dreiecke sind gegeben: drei Winkel.

Um die Seiten a, b, c eines Dreiecks zu bestimmen, dessen Winkel A, B, C gegeben sind, nehmen wir dessen Polardreieck zu Hilfe, dessen Seiten a', b', c', und Winkel A', B', C' heißen mögen, so haben wir (nach §. 57.): $\sin. a = \sin. A'$; $\cos. a = - \cos. A'$; $\sin. b = \sin. B'$; $\cos. b = - \cos. B'$; $\sin. c = \sin. C'$; $\cos. c = - \cos. C'$; $\sin. A = \sin. a'$; $\cos. A = - \cos. a'$ 2c. . . . Führen wir diese Werthe in (XI. 1.) ein, so haben wir:

$$- \cos. a' = \frac{- \cos. A' - (- \cos. B' . - \cos. C')}{\sin. B' . \sin. C'} \text{; oder}$$

$$\cos. a' = \frac{\cos. A' + \cos. B' . \cos. C'}{\sin. B' . \sin. C'}.$$

Da nun dieß für jedes sphärische Dreieck gilt, so ist auch:

$$\cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B . \cos. C}{\sin. B . \sin. C} \quad \text{(XII. 1.); analog ist}$$

$$\cos. b = \frac{\cos. B + \cos. A . \cos. C}{\sin. A . \sin. C}$$

$$\cos. c = \frac{\cos. C + \cos. A . \cos. B}{\sin. A . \sin. B}.$$

Dadurch läßt sich nun aus drei gegebenen Winkeln jede Seite suchen. Um die Formel logarithmisch umzuformen, setze man (20)

$$2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} a = 1 - \cos. a$$

$$= 1 - \left(\frac{\cos. A + \cos. B . \cos. C}{\sin. B . \sin. C}\right)$$

$$= \frac{\sin. B . \sin. C - \cos. B . \cos. C - \cos. A}{\sin. B . \sin. C}$$

$$= - \left(\frac{\cos. (B + C) + \cos. A}{\sin. B . \sin. B}\right)$$

$$2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} a = - \frac{2 \cos. \tfrac{1}{2} (A + B + C) \cos. \tfrac{1}{2} (B + C - A)}{\sin. B . \sin. C} \text{; daher}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin.B.\sin.C}}\ \text{(XII. 2.)}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}b = \sqrt{-\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin.A.\sin.C}}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}c = \sqrt{-\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin.a.\sin.B}}.$$

Damit $\sin.\frac{1}{2}a$, $\sin.\frac{1}{2}b$, $\sin.\frac{1}{2}c$ nicht imaginär werde, muß $\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)$ negativ werden, d. h. $\frac{1}{2}(A+B+C) > 90^\circ$, oder $A+B+C > 180^\circ$; d. i. in einem sphärischen Dreiecke ist die Summe der drei Winkel größer, als zwei Rechte.

Nach §. 57. haben wir durch Anwendung des Polardreiecks $A+a' = 180^\circ$; $B+b' = 180$; $C+c' = 180^\circ$ also

$$\begin{array}{ll} A+B+C+a'+b'+c' & = 3.180^\circ \\ A+B+C & > 180^\circ \\ -\ -\ - & - \\ \hline a'+b'+c' & < 2.180^\circ \end{array}$$

d. h. in jedem sphärischen Dreiecke ist die Summe der drei Seiten kleiner, als vier Rechte.

Setzen wir in (XII. 1.) $2\cos.^2\frac{1}{2}a = 1+\cos.a$ (21) so ist

$$2\cos.^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\sin.B.\sin.C + \text{Cos}.B.\text{Cos}.C + \text{Cos}.A}{\sin.B.\sin.C}$$

$$= \frac{\text{Cos}.(B-C) + \text{Cos}.A}{\sin.B.\sin.C}\ (15)$$

$$= \frac{2\,\text{Cos}.\frac{1}{2}(A+B-C)\cos.\frac{1}{2}(A+C-B}{\sin.B.\sin.C}\ (29)$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin.B.\sin.C}}\ \text{(XII. 3.)}$$

woraus analog die Werthe für $\cos.\frac{1}{2}b$, $\cos.\frac{1}{2}c$ sich ergeben; dividirt man endlich (XII. 2.) durch (XII. 3), so hat man

$$\text{tg}.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)}}\ \text{(XII. 4.)}$$

woraus ebenfalls $\text{tg}.\frac{1}{2}b$, $\text{tg}.\frac{1}{2}c$ durch Analogie bestimmt wird.

§. 61.

Zur Auflösung eines sphärischen Dreieckes für den Fall, wo entweder c) zwei Seiten und ein Winkel oder d) zwei Winkel und eine Seite gegeben sind, ist immer eine Gleichung zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln nothwendig; wir werden daher beide Fälle zusammenfassen, und aus dem bereits Vorgetragenen für die möglichen Relationen von zwei Seiten und zwei Winkeln Sätze ableiten. Wir hatten nach (XII. 1.)

$$\cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\sin. B \sin. C}; \text{ nun ist (2)}$$

$$\sin.^2 a = 1 - \cos.^2 a = 1 - \left(\frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\sin. B \sin. C}\right)^2$$

$$= \frac{\sin.^2 B \sin.^2 C - \cos.^2 A - 2 \cos. A \cos. B \cos. C - \cos.^2 B \cos.^2 C}{\sin.^2 B \sin.^2 C}$$

$$= \frac{(1 - \cos.^2 B)(1 - \cos^2 C) - \cos^2 A - 2 \cos. A \cos. B \cos. C - \cos^2 B \cos^2 C}{\sin.^2 B \sin^2 C}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 B - \cos^2 C + \cos^2 B \cos^2 C - \cos^2 A - 2 \cos A \cos B \cos C - \cos^2 B \cos^2 C}{\sin.^2 B \sin.^2 C};$$

also auch

$$\sin. a = \frac{\sqrt{1 - \cos.^2 A - \cos.^2 B - \cos.^2 C - 2 \cos. A \cos B \cos C}}{\sin. B \sin. C} \text{ (XIII).}$$

Setzen wir

$$\sqrt{1 - \cos.^2 A - \cos.^2 B - \cos.^2 C - 2 \cos. A \cos. B \cos. C} = m,$$

so ist $\sin. a = \frac{m}{\sin. B \sin. C}$; und analog

$$\sin. b = \frac{m}{\sin. A \sin. C}$$

$$\sin. c = \frac{m}{\sin. A \sin. B}. \text{ Daher hat man}$$

$$\sin. a : \sin. b = \frac{m}{\sin. B \sin. C} : \frac{m}{\sin. A \sin. C}; \text{ d. i.}$$

$\sin. a : \sin. b = \sin. A : \sin. B$; eben so

$\sin. b : \sin. c = \sin. B : \sin. C$ (XIV);

es verhalten sich also in einem sphärischen Dreiecke die Sinus zweier Seiten, wie die Sinus der den Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Wird $a = b$, so wird auch $\sin. a = \sin. b$ und $\sin. A = \sin. B$; also auch $A = B$; d. h., wenn im sphärischen Dreiecke zwei Seiten gleich sind, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich, und umgekehrt; und sind alle Seiten gleich, so sind auch alle Winkel gleich. Ist $\sin. a > \sin. b$, d. i. $a > b$, so ist auch $\sin. A > \sin. B$, und $A > B$, d. h. im sphärischen Dreiecke liegt der größern Seite der größere Winkel, und umgekehrt gegenüber.

Aus dem hier entwickelten Satze (XIV) kann man also aus zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel den andern gegenüberliegenden Winkel, so wie aus zwei Winkeln und einer gegenüberliegenden Seite die andere gegenüberliegende Seite finden; nur ist die Ungewißheit, ob das gefundene Stück spitz oder stumpf sey; doch über diese Zweideutigkeit später.

§. 62.

Aus der so eben gefundenen Formel können wir durch Combinationen mit den frühern neue Relationen zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln folgendermaßen finden. Es war (XIV):

$$\sin. A \sin. b = \sin. a \sin. B$$
$$\sin. A \sin. c = \sin. a \sin. C; \text{ also auch}$$

$\sin.^2 A \sin. b \sin. c = \sin.^2 a \sin. B \sin. C$, und nach (1)

$$(1 + \cos. A)(1 - \cos. A) \sin. b \sin. c =$$
$$(1 + \cos. a)(1 - \cos. a) \sin. B. \sin. C.$$

Nun setzen wir nach (20) $1 - \cos. A = 2 \sin.^2 \frac{1}{2} A$ und $1 - \cos. a = 2 \sin.^2 \frac{1}{2} a$; dann ist:

$$(1 + \cos. A)\, 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} A \sin. b \sin. c =$$
$$(1 + \cos. a)\, 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} a \sin. B. \sin. C$$

$$2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} A (\sin. b \sin. c + \sin. b \sin. c \cos. A) =$$
$$2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} a (\sin. B \sin. C + \sin. B \sin. C \cos. a).$$

Nun ist nach (XI. 1.) $\sin.b \sin.c \cos.A = \cos.a - \cos.b \cos.c$ und nach (XII. 1.) $\sin.B \sin.C \cos.a = \cos.A + \cos.B \cos.C$; dieses in vorige Gleichung eingeführt, gibt:

$$2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} A (\sin.b \sin.c + \cos.a - \cos.b \cos.c) =$$
$$= 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} a (\sin.B \sin.C + \cos.A + \cos.B \cos.C);$$ und nach (13) (15)

$$2\sin.^2 \tfrac{1}{2} A(\cos.a - \cos.(b+c)) = 2\sin.^2 \tfrac{1}{2} a(\cos.A + \cos.(B-C))$$

Daraus erhalten wir nach (30) (29)

$$2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} A (2 \sin. \tfrac{1}{2} (b+c+a) . \sin. \tfrac{1}{2} (b+c-a) =$$
$$= 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} a (2 \cos. \tfrac{1}{2} (A+B-C) \cos. \tfrac{1}{2} (A-(B-C)).$$

Nun ist nach (12) und (14)

$$\sin. \left(\frac{b+c}{2} + \frac{a}{2}\right) . \sin. \left(\frac{b+c}{2} - \frac{a}{2}\right) =$$
$$= \left(\sin. \left(\frac{b+c}{2}\right) \cos. \frac{a}{2} + \cos. \left(\frac{b+c}{2}\right) \sin. \frac{a}{2}\right) \times$$
$$\times \left(\sin. \left(\frac{b+c}{2}\right) \cos. \frac{a}{2} - \cos. \left(\frac{b+c}{2}\right) \sin. \frac{a}{2}\right) =$$
$$= \sin.^2 \left(\frac{b+c}{2}\right) \cos.^2 \frac{a}{2} - \cos.^2 \left(\frac{b+c}{2}\right) \sin.^2 \frac{a}{2} =$$
$$= \sin.^2 \left(\frac{b+c}{2}\right) \left(1 - \sin.^2 \frac{a}{2}\right) -$$
$$- \left(1 - \sin.^2 \left(\frac{b+c}{2}\right)\right) \sin.^2 \frac{a}{2} \quad (1) =$$
$$= \sin.^2 \left(\frac{b+c}{2}\right) - \sin.^2 \frac{a}{2} \sin.^2 \left(\frac{b+c}{2}\right) -$$
$$- \sin.^2 \frac{a}{2} + \sin.^2 \frac{a}{2} \sin.^2 \left(\frac{b+c}{2}\right) =$$
$$= \sin.^2 \left(\frac{b+c}{2}\right) - \sin.^2 \frac{a}{2}.$$

Eben so ist nach (13) und (15)

$$\cos.\left(\frac{A}{2}+\frac{B-C}{2}\right).\cos.\left(\frac{A}{2}-\frac{B-C}{2}\right)=$$

$$=\left(\cos.\frac{A}{2}\cos.\left(\frac{B-C}{2}\right)-\sin.\frac{A}{2}\sin.\left(\frac{B-C}{2}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\cos.\frac{A}{2}\cos.\left(\frac{B-C}{2}\right)+\sin.\frac{A}{2}\sin.\left(\frac{B-C}{2}\right)\right)=$$

$$=\cos.^2\frac{A}{2}\cos.^2\left(\frac{B-C}{2}\right)-\sin.^2\frac{A}{2}\sin.^2\left(\frac{B-C}{2}\right)=$$

$$=\left(1-\sin.^2\frac{A}{2}\right)\cos.^2\left(\frac{B-C}{2}\right)-$$

$$-\sin.^2\frac{A}{2}\left(1-\cos.^2\left(\frac{B-C}{2}\right)\right)(1)=$$

$$=\cos.^2\left(\frac{B-C}{2}\right)-\sin.^2\frac{A}{2}\cos.^2\left(\frac{B-C}{2}\right)-$$

$$-\sin.^2\frac{A}{2}+\sin.^2\frac{A}{2}\cos.^2\left(\frac{B-C}{2}\right)=$$

$$=\cos.^2\left(\frac{B-C}{2}\right)-\sin.^2\frac{A}{2}.$$

Diese beiden Werthe in obige Gleichung gehörig eingeführt, gibt:

$$\sin.^2\tfrac{1}{2}A\,(\sin.^2\tfrac{1}{2}(b+c)-\sin.^2\tfrac{1}{2}a)=$$
$$=\sin.^2\tfrac{1}{2}a\,(\cos.^2\tfrac{1}{2}(B-C)-\sin.^2\tfrac{1}{2}A);$$

daraus ist:

$$\sin.^2\tfrac{1}{2}A\sin.^2\tfrac{1}{2}(b+c)=\sin.^2\tfrac{1}{2}a\cos.^2\tfrac{1}{2}(B-C),$$

und nach Ausziehung der Wurzel:

$$\sin.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}(b+c)=\sin.\tfrac{1}{2}a\cos.\tfrac{1}{2}(B-C)\;\textbf{(XV. 1.)}.$$

Lösen wir ferner auf ähnliche Weise in der oben gegebenen Formel die Ausdrücke:

$1+\cos.A$ und $1-\cos.a$

$1-\cos.A$ und $1-\cos.a$

$1-\cos.A$ und $1+\cos.a$ auf, so erhalten wir noch nachstehende drei Gleichungen:

$$\sin.\tfrac{1}{2}A.\cos.\tfrac{1}{2}(b+c) = \cos.\tfrac{1}{2}a\cos.\tfrac{1}{2}(B+C) \quad (XV.2.)$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}A.\cos.\tfrac{1}{2}(b-c) = \cos.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}(B+C) \quad (XV.3.)$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}(b-c) = \sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}(B-C) \quad (XV.4.)$$

Durch gehörige Division dieser vier Gaußischen Gleichungen, und zwar (XV. 1.) durch (XV. 2.), ferner (XV. 4.) durch (XV. 3.); eben so (XV. 3.) durch (XV. 2.), und endlich (XV. 4.) durch (XV. 1.) erhalten wir die Neperschen Gleichungen:

$$\text{tg}.\tfrac{1}{2}(b+c) = \text{tg}.\tfrac{1}{2}a\,\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(B-C)}{\cos.\tfrac{1}{2}(B+C)} \quad (XVI.1.)$$

$$\text{tg}.\tfrac{1}{2}(b-c) = \text{tg}.\tfrac{1}{2}a\,\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(B-C)}{\sin.\tfrac{1}{2}(B+C)} \quad (XVI\ 2.)$$

$$\text{tg}.\tfrac{1}{2}(B+C) = \text{cotg}.\tfrac{1}{2}A\,\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(b-c)}{\cos.\tfrac{1}{2}(b+c)} \quad (XVI.3.)$$

$$\text{tg}.\tfrac{1}{2}(B-C) = \text{cotg}.\tfrac{1}{2}A\,\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b-c)}{\sin.\tfrac{1}{2}(b+c)} \quad (XVI.4.)$$

§. 63.

Die im vorigen §. unter XVI entwickelten vier Gleichungen dienen dazu, in einem sphärischen Dreiecke aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die beiden andern Winkel, und aus zwei Winkeln und der eingeschlossenen Seite die zwei andern Seiten zu bestimmen; das letzte fehlende Stück findet man dann leicht durch die Gleichung XIV.

Sind in einem Dreiecke zwei Seiten nebst den gegenüberliegenden Winkeln bekannt, so findet man die zwei fehlenden Stücke ebenfalls durch die Gleichungen; denn man hat durch einfache Uebersetzung aus XVI 1 und 2:

$$\text{tg}.\tfrac{1}{2}a = \text{tg}.\tfrac{1}{2}(b+c)\,\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(B+C)}{\cos.\tfrac{1}{2}(B-C)}$$

$$= \text{tg}.\tfrac{1}{2}(b-c)\,\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(B+C)}{\sin.\tfrac{1}{2}(B-C)} \quad (XVII.1.).$$

Eben so folgt aus (XVI. 3. und 4.):

$$\text{cotg.}\tfrac{1}{2}A = \text{tg.}\tfrac{1}{2}(B+C)\frac{\cos.\frac{1}{2}(b+c)}{\cos.\frac{1}{2}(b-c)}$$

$$= \text{tg.}\tfrac{1}{2}(B-C)\frac{\sin.\frac{1}{2}(b+c)}{\sin.\frac{1}{2}(b-c)} \quad \text{(XVII. 2.)}.$$

Um aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite unmittelbar zu finden, ist nach XI. 1.

$$\cos.a = \cos.b\cos.c + \sin.b\sin.c\cos.A$$

$$= \cos.c\left(\cos.b + \frac{\sin.b\sin.c\cos.A}{\cos.c}\right.$$

$$= \cos.c(\cos.b + \sin.b\,\text{tg.}c\cos.A)$$

Setzt man $\text{tg.}c\cos.A = \text{tg.}x$, so ist:

$$\cos.a = \cos.c(\cos.b + \sin.b\,\text{tg.}x)$$

$$= \frac{\cos.c}{\cos.x}(\cos.b\cos.x + \sin.b\sin.x) \ (6)$$

$$\cos.a = \frac{\cos.c}{\cos.x}\cos.(b-x) \ (15) \quad \text{(XVIII. 1.)},$$

aus welcher Gleichung a unmittelbar durch b, c, A bestimmt wird.

Um aus zwei Winkeln und der eingeschlossenen Seite den dritten Winkel unmittelbar zu finden, ist nach XII. 1.

$$\cos.A = \cos.a\sin.B\sin.C - \cos.B\cos.C$$

$$\frac{\cos.A}{\cos.C} = \cos.a\sin.B\,\text{tg.}C - \cos.B.$$

Setzt man $\cos.a\,\text{tg.}C = \text{cotg.}x = \frac{\cos.x}{\sin.x}$ (8), so ist

$$\frac{\cos.A}{\cos.C} = \frac{\cos.x\sin.B - \sin.x\cos.B}{\sin.x}$$

$$= \frac{\sin.(B-x)}{\sin.x} \ (14)\text{; also}$$

$$\cos.A = \frac{\cos.C\sin.(B-x)}{\sin.x} \quad \text{(XVIII. 2.)},$$

woraus A unmittelbar aus B, C, a gefunden wird.

Um aus zwei Seiten und einem gegenüberstehenden

Winkel den eingeschlossenen Winkel, so wie aus zwei Winkeln und einer gegenüberstehenden Seite die eingeschlossene Seite zu finden, kann aus XII. 1 noch folgende Gleichung abgeleitet werden.

$$\cos. A = \cos. a \sin. B \sin. C - \cos. B \cos. C$$
$$\cos. B = \cos. b \sin. A \sin. C - \cos. A \cos. C$$
$$\cos. C = \cos. c \sin. A \sin. B - \cos. A \cos. B$$

Setzen wir in der ersten dieser drei Gleichungen statt cos. B den Werth aus der zweiten, so ist:

$$\cos.A = \cos.a \sin.B \sin.C - \cos.C (\cos.b \sin.A \sin.C - \cos.A \cos.C)$$
$$= \cos.a \sin.B \sin.C - \cos.b \sin.A \sin.C \cos.C + \cos.A \cos.^2 C$$
$$\cos.A (1 - \cos.^2 C) = \cos.a \sin.B \sin.C - \cos.b \sin.A \sin.C \cos.C.$$

Setzen wir (1) $1 - \cos.^2 C = \sin.^2 C$ und nach XIV $\sin.B = \frac{\sin.A \sin.b}{\sin.a}$, und dividiren dann beide Seiten durch sin. A sin. C, so hat man:

$$\text{cotg}.A \sin.C = \text{cotg}.a \sin.b - \cos.b \cos.C \,. \quad \text{(XIX)}.$$

Durch ähnliche Substitution des Cos. C in die erste und zweite Gleichung, oder durch Analogie erhält man:

$$\text{cotg}.A \sin.B = \text{cotg}.a \sin.c - \cos.c \cos.B$$
$$\text{cotg}.B \sin.A = \text{cotg}.b \sin.c - \cos.c \cos.A \text{ rc.} \ldots$$

Wäre nun a, b, A gegeben, so fände man C, und bei gegebenen A, B, a würde c gefunden; nur wäre die Auflösung weitläufig, weil durch Einführung des Werthes $\sin.C = \sqrt{1 - \cos.^2 C}$ oder $\cos. C = \sqrt{1 - \sin.^2 C}$ rc.. eine quadratische Gleichung zum Vorschein kommt; statt dessen bedient man sich der bereits gegebenen Gleichungen, oder macht eine (der Gleichung XVIII ähnliche) Umformung.

Wir hatten eben:

$\text{cotg}.A \sin.C = \text{cotg}.a \sin.b - \cos.b \cos.C$; daraus wird nach (8)

$$\frac{\text{cotg}.A \sin.C}{\sin.b} = \text{cotg}.a - \text{cotg}.b. \text{Cos}.C.$$

Setzt man nun $\frac{\text{cotg. A}}{\text{cos. b}} = \text{tg. x}$, also

$$\frac{\text{cotg. A. cos. b}}{\text{cos. b sin. b}} = \text{tg. x cotg. b} = \frac{\text{cotg. A}}{\text{sin. b}}; \text{ so ist}$$

$$\text{tg. x cotg. b sin. C} = \text{cotg. a} - \text{cotg. b cos. C}$$

$$\text{cotg. a} = \text{cotg. b cos. C} + \text{tg. x cotg. b sin. C}$$

$$= \text{cotg. b} \left(\text{Cos. C} + \frac{\text{sin. x sin. C}}{\text{cos. x}} \right)$$

$$= \text{cotg. b} \left(\frac{\text{cos. C cos. x} + \text{sin. C sin. x}}{\text{cos. x}} \right)$$

$$= \frac{\text{cotg. b}}{\text{cos. x}} \text{cos. (C} - \text{x) (15), also}$$

$$\text{Cos. (C} - \text{x)} = \frac{\text{cotg. a cos. x}}{\text{cotg. b}}. \text{ (XX. 1.)}.$$

Ist daher a, b, A gegeben, und daraus x bestimmt, so findet man C.

Eben so hatten wir nach XIX:

$$\text{cotg. A sin. B} = \text{cotg. a sin. c} - \text{cos. c cos. B};$$

$$\text{cotg. A tg. B} = \frac{\text{cotg. a sin. c}}{\text{cos. B}} - \text{cos. c.}$$

Setzen wir nun: $\frac{\text{cotg. a}}{\text{cos. B}} = \text{cotg. x} = \frac{\text{cos. x}}{\text{sin. x}}$ (8),

so ist $\text{cotg. A tg. B} = \frac{\text{cos. x sin. c}}{\text{sin. x}} - \text{cos. c}$

$$= \frac{\text{cos. x sin. c} - \text{sin. x cos. c}}{\text{sin. x}}$$

$$= \frac{\text{sin. (c} - \text{x)}}{\text{sin. x}}; \text{ daher}$$

$$\text{sin. (c} - \text{x)} = \text{sin. x cotg. A. tg. B. (XX. 2.)}.$$

Ist nun A, B, a gegeben, so findet man nach der Bestimmung von x den Werth für c. Die analogen Fälle für die Gleichungen XVIII. 1 und 2, und XX. 1 und 2 ergeben sich ohnehin leicht.

§. 64.

Es läßt sich nun über die Auflösung der sphärischen Dreiecke folgende Tabelle entwerfen:

IX. Tabelle für schiefwinkliche sphärische Dreiecke.

Fall.	Gegeben.	Gesucht.	Gleichung.	Bemerkung
1.	abc	A	$\sin.\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(a+b-c)\sin.\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin.b\ \sin.c}};$	B und C findet man analog oder nach XIV.
2.	ABC	a	$\sin.\frac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin.B\ \sin.C}}$	b und c analog, oder nach XIV.
3.	abC	A u. B	$\left\{\begin{array}{l} tg.\frac{1}{2}(A+B) = cotg.\frac{1}{2}C.\frac{\cos.\frac{1}{2}(a-b)}{\cos.\frac{1}{2}(a+b)} \\ tg.\frac{1}{2}(A-B) = cotg.\frac{1}{2}C.\frac{\sin.\frac{1}{2}(a-b)}{\sin.\frac{1}{2}(a+b)} \end{array}\right.$	c kann auch nach XVIII. 1. gefunden werden.
		c	$tg.\frac{1}{2}c = tg.\frac{1}{2}(a-b)\ \frac{\sin.\frac{1}{2}(A+B)}{\sin.\frac{1}{2}(A-B)}$	
	abA	B	$\sin.B = \frac{\sin.b\ \sin.A}{\sin.a}$	B in manchen Fällen unbestimmt.
		c	$tg.\frac{1}{2}c = tg.\frac{1}{2}(a-b)\ \frac{\sin.\frac{1}{2}(A+B}{\sin.\frac{1}{2}\ A-B)}$	C kann auch gesucht werden nach XX. 1.
		C	$cotg.\frac{1}{2}C = tg.\frac{1}{2}(A-B)\ \frac{\sin.\frac{1}{2}(a+b)}{\sin.\frac{1}{2}(a-b)}$	
4.	ABc	a u. b	$\left\{\begin{array}{l} tg.\frac{1}{2}(a+b) = tg.\frac{1}{2}c\ \frac{\cos.\frac{1}{2}(A-B)}{\cos.\frac{1}{2}(A+B)} \\ tg.\frac{1}{2}(a-b) = tg.\frac{1}{2}c\ \frac{\sin.\frac{1}{2}(A-B)}{\sin.\frac{1}{2}(A+B)} \end{array}\right.$	C findet man auch nach XVIII. 2.
		C	$cotg.\frac{1}{2}C. = tg.\frac{1}{2}(A-B)\ \frac{\sin.\frac{1}{2}(a+b)}{\sin.\frac{1}{2}(a-b)}$	
	ABa	b	$\sin.b = \frac{\sin.B.\ \sin.a}{\sin.A}$	b in manchen Fällen unbestimmt.
		C	$cotg.\frac{1}{2}C = tg.\frac{1}{2}(A-B)\ \frac{\sin.\frac{1}{2}(a+b)}{\sin.\frac{1}{2}(a-b)}$	c kann auch gefunden werden nach XX. 2.
		c	$tg.\frac{1}{2}c = tg.\frac{1}{2}(a-b)\ \frac{\sin.\frac{1}{2}(A+B)}{\sin.\frac{1}{2}(A-B)}$	

Die ersten zwei Fälle in voranstehender Tabelle sind bestimmt; so auch in 3 und 4, wo zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel. oder zwei Winkel und die eingeschlossene Seite gegeben sind. Sind hingegen zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel, oder zwei Winkel und eine gegenüberliegende Seite gegeben, so tritt Zweideutigkeit ein, die hier näher untersucht werden soll, unter der Bemerkung, daß zwei Seiten, zwei Winkel, oder eine Seite und ein Winkel gleichartig heißen, wenn beide spitz oder stumpf sind; außerdem ungleichartig.

Im dritten Falle, wo bei gegebenen a, b, A der Winkel B gesucht werden soll, ist

B stumpf, oder $B > 90°$; wenn

1) $A > 90°$ und
$a < b$.

$B > 90°$, wenn

2) $A < 90°$, und
$a > 180° - b$.

Der Grund für 1 liegt in dem Satze, daß im sphärischen Dreiecke der größern Seite auch der größere Winkel gegenüber liege.

Nach 2 ist: $a > 180° - b$; daher
$a + b > 180°$.

Nun haben wir nach (XXI. 3.)

$$tg. \tfrac{1}{2}(A+B) = cotg. \tfrac{1}{2} A \, \frac{cos. \tfrac{1}{2}(a-b)}{cos. \tfrac{1}{2}(a+b)}.$$

Im sphärischen Dreiecke ist weder eine Seite noch ein Winkel größer, als 180°; daher ist in vorstehender Gleichung das Produkt $cotg. \tfrac{1}{2} A \,.\, cos. \tfrac{1}{2}(a-b)$ immer positiv; das Zeichen für $\tfrac{1}{2}(A+B)$ hängt also von $cos. \tfrac{1}{2}(a+b)$ ab; mithin ist $\tfrac{1}{2}(A+B)$ mit $\tfrac{1}{2}(a+b)$ immer gleichartig; da nun $a+b > 180°$ (ex hyp.), so ist auch

$A+B > 180°$; und da
$A < 90°$, so ist
$B > 90°$.

B ist aber spitz, oder $B < 90°$, wenn

1) $A < 90°$, und
$a > b$;
$B < 90°$, wenn
2) $A > 90°$, und
$a < 180° - b$.

Da hier nach 2: $a < 180° - b$, so ist
$a + b < 180°$; also auch
$A + B < 180°$; es ist (ex hyp.)
$A > 90°$; also
$B < 90°$.

Auf ähnliche Art, und nach den nemlichen Gründen wird bestimmt, wenn A, B, a gegeben ist, ob b spitz oder stumpf sey; es ist nemlich

b stumpf, oder $b > 90°$; wenn
1) $a > 90°$, und
$A < B$;
$b > 90°$, wenn
2) $a < 90°$
$A > 180° - B$.

Es ist aber b spitz, oder $b < 90°$, wenn
1) $a < 90°$, und
$A > B$;
$b < 90°$, wenn
2) $a > 90°$, und
$A < 180° - B$.

In den übrigen Fällen bleibt B oder b unbestimmt.

X. Das rechtwinkliche sphärische Dreieck.

§. 65.

Aus den für die Dreiecke überhaupt aufgestellten Gleichungen lassen sich einfache Gleichungen zur Lösung der rechtwinklichen ableiten. Wir bezeichnen den rechten Winkel $= H$, die Hypotenuse $= h$.

Setzen wir nach XI. 1. in

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}$$

$A = H$, so ist $\mathrm{Cos.}\, A = 0$; daher

$$\cos. h = \cos. b \cos. c \ (\mathrm{XXI}), \text{ und daraus}$$

$$\cos. b = \frac{\cos. h}{\cos. c};$$

$$\cos. c = \frac{\cos. h}{\cos. b}.$$

Nimmt man nach XII. 1. in

$$\cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\sin. B \sin. C}$$

$A = H$, so ist auch:

$$\cos. h = \mathrm{cotg.}\, B \,\mathrm{cotg.}\, C \ (\mathrm{XXII}), \text{ woraus}$$

$$\mathrm{cotg.}\, B = \frac{\cos. h}{\mathrm{cotg.}\, C}, \text{ oder } \mathrm{tg.}\, B = \frac{\mathrm{cotg.}\, C}{\cos. h};$$

$$\mathrm{cotg.}\, C = \frac{\cos. h}{\mathrm{cotg.}\, B}.$$ Eben so wird nach (25)

$$\mathrm{cotg.}\, B = \cos. h \,\mathrm{tg.}\, C$$

$$\mathrm{cotg.}\, C = \cos. h \,\mathrm{tg.}\, B$$

Setzen wir ferner in XII. 1.

$$\cos. b = \frac{\cos. B + \cos. A \cos. C}{\sin. A \sin. C}$$

$A = H$, also $\mathrm{Cos.}\, A = 0$, und $\mathrm{Sin.}\, A = 1$, so ist

$$\cos. b = \frac{\cos. B}{\sin. C} \ (\mathrm{XXIII}); \text{ und analog}$$

$$\cos. c = \frac{\cos. C}{\sin. B}, \text{ woraus wieder folgt:}$$

$$\sin. C = \frac{\cos. B}{\cos. b};$$

$$\cos. B = \sin. C \cos. b$$

Wird in XIV $\sin. a : \sin. b = \sin. A : \sin. B$ $A = H$, so hat man

$$\sin. h = \frac{\sin. b}{\sin. B}; \text{ (XXIV)}, \text{ und analog}$$

$$\sin. h = \frac{\sin. c}{\sin. C}; \text{ woraus sich ergibt:}$$

$$\sin. C = \frac{\sin. c}{\sin. h}, \text{ und}$$

$$\sin. c = \sin. h \sin. C.$$

Führen wir in XIX

$$\text{cotg.} A \sin. C = \text{cotg.} a \sin. b - \cos. b \cos. C$$

$A = H$ ein, also $\text{cotg.} A = 0$, so ist:

$$\text{cotg.} h \sin. b = \cos. b \cos. C; \text{ also}$$

$$\text{cotg.} h = \text{cotg.} b \cos. C \text{ (XXV)}, \text{ oder}$$

$$\text{cotg.} h = \frac{\cos. C}{\text{tg.} b}; \text{ woraus}$$

$$\text{tg.} b = \frac{\cos. C}{\text{cotg.} h} = \text{tg.} h \cos. C \text{ und}$$

$$\cos. C = \text{cotg.} h \,.\, \text{tg.} b$$

Setzt man endlich in XIX

$$\text{cotg.} B \sin. A = \text{cotg.} b \sin. c - \cos. c \cos. A$$

$A = H$, so ist:

$$\text{cotg.} B = \text{cotg.} b \sin. c \text{ (XXVI)}; \text{ woraus}$$

$$\text{cotg.} b = \frac{\text{cotg.} B}{\sin. c}, \text{ und}$$

$$\sin. c = \frac{\text{cotg.} B}{\text{cotg.} b} = \text{cotg.} B \text{ tg.} b.$$

Voranstehende Gleichungen reichen zur Auflösung aller rechtwinklichen sphärischen Dreiecke hin, wie nachstehende Tabelle zeigt.

XI. Tabelle für rechtwinkliche sphärische Dreiecke.

Fall.	Gegeben.	Gesucht.	Gleichung.
1.	b c	h	$\cos. h = \cos. b \cos. c.$
		B	$\text{cotg}. B = \text{cotg}. b \sin. c$
		C	$\text{cotg}. C = \text{cotg}. c \sin. b$
2.	B, C	h	$\cos. h = \text{cotg}. B \text{ cotg}. C$
		b	$\cos. b = \frac{\cos. B}{\sin. C}$
		c	$\cos. c = \frac{\cos. C}{\sin. B}$
3.	h, b	c	$\cos. c = \frac{\cos. h}{\cos. b}$
		B	$\sin. B = \frac{\sin. b}{\sin. h}$
		C	$\cos. C = \text{cotg}. h \text{ tg}. b$
4.	h, B	b	$\sin. b = \sin. h \sin. B$
		c	$\text{tg}. c = \text{tg}. h \cos. B$
		C	$\text{cotg}. C = \cos. h . \text{tg}. B$
5.	b C	h	$\text{cotg}. h = \text{cotg}. b \cos. C$
		c	$\text{cotg}. c = \frac{\text{cotg}. C}{\sin. b}$
		B	$\cos. B = \sin. C \cos. b$
6.	b B	h	$\sin. h = \frac{\sin. b}{\sin. B}$
		C	$\sin. C = \frac{\cos. B}{\cos. b}$
		c	$\sin. c = \text{tg}. b \text{ cotg}. B$

Um zu untersuchen, ob das Gesuchte spitz oder stumpf sey, sehen wir aus 1, daß die Hypotenuse $\begin{matrix}\text{spitz}\\\text{stumpf}\end{matrix}$ sey, wenn die Perpendikel $\begin{matrix}\text{gleichartig}\\\text{ungleichartig}\end{matrix}$ sind; und daß eine Seite mit dem gegenüberliegenden Winkel immer gleichartig ist. Was von der Hypotenuse rücksichtlich der Perpendikel gilt, gilt auch rücksichtlich der schiefen Winkel in 2. Dergleichen Schlüsse lassen sich für die übrigen Fälle leicht ableiten.

Zus. 1. In der unter XVIII. 1. entwickelten Formel für schiefwinkliche Dreiecke durch Annahme von tg.x = tg.c Cos.A sehen wir, daß diese Gleichung einem rechtwinklichen Dreiecke angehöre, nemlich analog sey dem Satze XXV, wo wir fanden tg. b = tg. h Cos. C; es ist also x ein Perpendikel eines rechtwinklichen Dreiecks, in welchem c die Hypotenuse, und A der anliegende Winkel ist.

Es wird also hier angenommen, im sphärischen Dreiecke sey von einem Winkel auf die gegenüberliegende Seite ein Perpendikel gezogen; x ist dann ein Abschnitt der gegenüberliegenden Seite, und der andere Abschnitt ist = b — x; woraus nach XVIII. 1. folgt:

cos. a : cos. c = cos. (b — x) : cos. x; d. h. wenn in einem Dreiecke von einem Winkel auf die gegenüberliegende Seite ein Perpendikel gezogen wird, so verhalten sich die Cosinus der Seiten, wie die Cosinus der diesen Seiten anliegenden Abschnitte.

Eben so ist XVIII. 2. angenommen worden:

cotg. x = cos. a tg. C.

Auf diese Gleichung gehört einem rechtwinklichen Dreiecke an, und ist analog der Gleichung XXII, wo wir fanden:

cotg. B = cos. h tg. C.

Hier ist also x der schiefe Winkel eines rechtwinklichen Dreiecks, in welchem a die Hypotenuse, und C der andere schiefe Winkel ist. Auch in diesem Falle ist aus einem Winkel auf die gegenüberliegende Seite ein Perpendikel gezogen, wodurch der Winkel in zwei Theile getheilt wird; ein Theil heißt x, der andere = B — x, und man hat:

Cos. A : Cos. C = sin. B — x : sin. x, d. h. die Cosinuse zweier Winkel verhalten sich, wie die Sinuse der durch das Perpendikel entstandenen Theile des dritten Winkels.

Zus. 2. Zur Ableitung der Gleichung XX. 1. setzten

wir $tg. x = \frac{cotg. A}{cos. b}$; auch diese Gleichung kommt beim rechtwinklichen Dreiecke vor, wo wir in XXII hatten:

$$tg. B = \frac{cotg. C}{cos. h}.$$

Es ist also hier x ein Winkel eines rechtwinklichen Dreiecks, in welchem b die Hypotenuse, und A der andere schiefe Winkel ist; aus der XX. 1. entwickelten Gleichung hat man:

$$Cotg. a : cotg. b = Cos. (C - x) : cos. x;$$

es verhalten sich also die Cotangenten zweier Seiten, wie die Cosinuse der durch das Perpendikel entstandenen Theile des von den zwei Seiten eingeschlossenen Winkels.

In der Gleichung XX. 2. setzten wir $cotg. x = \frac{cotg. a}{cos. B}$, ganz entsprechend der in XXV gefundenen Gleichung des rechtwinklichen Dreiecks, wo wir hatten:

$$cotg. b = \frac{cotg. h}{cos. C}.$$

Es ist also hier x das Perpendikel eines rechtwinklichen Dreiecks, in welchem a die Hypotenuse und B der dem Perpendikel anliegende schiefe Winkel ist. Aus der Gleichung XX. 2. hat man:

$$tg. A : tg. B = sin. (c - x) : sin. x,$$ d. h. die Tangenten zweier Winkel verhalten sich, wie die Sinuse der durch das Perpendikel gemachten Abschnitte der eingeschlossenen Seite.

Es läßt sich also das schiefwinkliche sphärische Dreieck auf zwei rechtwinkliche zurückführen, und dadurch aus den gegebenen Stücken das Fehlende finden.

XII. Fläche des sphärischen Dreiecks.

§. 66.

Die Fläche des sphärischen Dreiecks ist ein Theil der

Kugeloberfläche; da nun diese nach der Stereometrie aus dem Radius berechnet werden kann, so läßt sich auch die Fläche des sphärischen Dreiecks bestimmen, wenn dessen Verhältniß zur Kugeloberfläche bekannt ist.

Schneiden sich zwei größte Kreise (Fig. 21) PQRM und PNRFP, so schließen die halben Peripherien PQR, PNR auf der Oberfläche der Kugel die Fläche PQRNP ein, deren Größe abhängt vom W. DCE = P, unter welchem die zwei größten Kreise sich schneiden. Heißt nun die erwähnte Fläche = F, die Kugeloberfläche = S, so ist:

$$S : F = 360^\circ : P^\circ;\ \text{also}$$

$$F = \frac{S \cdot P^\circ}{360^\circ}.$$

Nun ist aber die Oberfläche der Kugel $= 4 r^2 \pi$; daher

$$F = \frac{4 r^2 \pi \cdot P^\circ}{360^\circ} = \frac{r^2 \pi \cdot P^\circ}{90^\circ}.$$

Es sey nun (Fig. 24) ABC ein sphärisches Dreieck, gebildet durch drei größte Kreise DAGxD, EyHCE, FAMrF, so ist: nFA = 180° = AMN;

BAMm = 180° = mFB; oder

nFB + BA = 180° = BA + AMN, woraus folgt, daß auch nFB = AMm; auf gleiche Art läßt sich erweisen, daß auch

BEx = CHm, und

xDA = CGn.

Es ist auch BAMm = 180° = AMmn, oder

BA + AMm = AMm + mn; also auch

BA = mn; gleichfalls ist:

AC = nx, und

BC = mx.

Daraus folgt nun wegen der gleichen Seiten:

$\triangle$ ADxmMA = $\triangle$ BCGnFB.

Es ist aber $\triangle ABC + \triangle BCGnFB = \frac{r^2\pi . A}{90^\circ}$

$\triangle ABC + \triangle CHmMA = \frac{r^2\pi . B}{90^\circ}$

$\triangle ABC + \triangle BExDA = \frac{r^2\pi . C}{90^\circ}$; also auch

---

$3\triangle ABC + \triangle BnC + \triangle CmA + \triangle BxA = \frac{r^2\pi}{90^\circ}(A+B+C)$.

Da nun $\triangle BnC = \triangle ADxmMA$, so ist:

$3\triangle ABC + \triangle Axm + \triangle CmA + \triangle BxA = \frac{r^2\pi}{90^\circ}(A+B+B)$

$\triangle ABC + \triangle Axm + \triangle CmA + \triangle BxA = \frac{r^2\pi}{90^\circ}(A+B+C)$
$-2\triangle ABC.$

Da die Glieder der linken Seite in letzter Gleichung die halbe Kugelfläche ausmachen, oder $= 2r^2\pi$, so ist:

$$2r^2\pi = \frac{r^2\pi}{90^\circ}(A+B+C) - 2\triangle ABC,$$

und daraus ergibt sich:

$$\triangle ABC = \frac{r^2\pi}{180^\circ}(A+B+C) - r^2\pi$$
$$= \frac{r^2\pi(A+B+C) - 180^\circ r^2\pi}{180^\circ}.$$

Also $\triangle ABC = \frac{r^2\pi}{180^\circ}(A+B+C-180^\circ)$.

Die Größe $A+B+C-180^\circ$ drückt den Ueberschuß (sphärischer Exceß) der drei sphärischen Winkel über 180° aus; es kann vorstehende Gleichung auch ausgedrückt werden: $\triangle ABC : r^2\pi = A+B+C-180^\circ : 180^\circ$; oder ein sphärisches Dreieck verhält sich zur Fläche eines größten Kreises, wie der sphärische Exceß zu 180°.

Heißt ein anderes Dreieck auf der nemlichen Kugelfläche EDF, so ist:

$\triangle EDF : r^2\pi = E + D + F - 180^\circ : 180^\circ$; daher
$\triangle ABC : \triangle EDF = A + B + C - 180^\circ : E + D + F - 180^\circ$; d. h. zwei Dreiecke auf derselben Kugelfläche verhalten sich, wie ihre sphärischen Excesse.

Beträgt der sphärische Exceß Minuten, oder Sekunden, so müssen diese entweder auf Grade reduzirt werden, oder 180° müssen auf die niedrigste entsprechende Einheit resolvirt werden.

Berücksichtigt man hier Dreiecke, die auf unserer Erde gemessen werden, so beträgt der sphärische Exceß gewöhnlich nur Sekunden, da sie im Verhältnisse zur Oberfläche der Erde immer sehr klein sind.

Heißen wir die Sekunden des Excesses E, und setzen wir den Halbmesser der Erde = 859,5 geographische Meilen, so ist

$$\triangle ABC = \frac{859{,}5^2 . \pi . E}{180^\circ . 60 . 60} = \frac{859{,}5^2 \pi . E}{648000}.$$

Daher log. $\triangle$ ABC = 2 log. 859,5 + log. π + log. E — log. 648000.

Es ist aber: 2 log. 859,5 = 5.8684918
+ log. π = 0.4971499

6.3656417
— log. 648000 = —5.8115750

0.5540667.

Daher log. $\triangle$ ABC = 0.5540667 + log. E.

Wäre E = 1″, so wäre
log. $\triangle$ ABC = 0.5540667 = log. 3,58151.
Das Dreieck enthielte also 3,58151 geographische □Meilen.

XIII. Aufgaben aus mathematischer Geographie, durch sphärische Trigonometrie gelöst.

§. 67.

In der matheimatschen Geographie kommen mehrere

Aufgaben vor, die mit Hilfe eines Globus mechanisch gelöst werden, z. B. die Entfernung zweier Orte auf der Erde zu bestimmen, für einen gegebenen Ort und Tag die Zeit des Auf= und Unterganges der Sonne (also die Tag= und Nachtlänge) anzugeben ꝛc... Diese Aufgaben können nun auch bei gehörigen Daten durch sphärische Dreiecke gelöst werden, wie im Folgenden gezeigt werden soll. Die hiezu nöthigen Vorkenntnisse können zwar aus jedem Lehrbuche der mathematischen Geographie geschöpft werden; doch wird es nicht undienlich seyn; sie in Kürze hier zusammenzufassen.

Derjenige Punkt am Himmel, P (Fig. 25), der bei der täglichen scheinbaren Umdrehung der Himmelskugel uns unbeweglich erscheint, heißt Nordpol, und die Linie Pp, um welche sich der Himmel zu bewegen scheint, heißt Weltaxe, mit welcher die Erdaxe zusammenfällt; der, uns unsichtbare, Punkt p vom entgegengesetzten Theile des Himmels heißt Südpol. Der größte Kreis AMB, der von beiden Polen in allen Punkten 90° absteht, heißt Aequator. Derjenige größte Kreis DLG, der den Aequator (gegenwärtig) unter einem Winkel von 23° 27′ 33″ schneidet, heißt Ekliptik, und bezeichnet den jährlichen scheinbaren Umlauf der Sonne. Wenn man auf einem beliebigen Punkte der Erdoberfläche eine gerade Linie in der Richtung der Schwere (Vertikallinie) gezogen denkt, und sie bis in den Himmelsraum verlängert, so heißt der eine sichtbare Endpunkt dieser Linie Z das Zenith, der andere unsichtbare N das Nadir; der größte Kreis FMG, der von diesen beiden Punkten überall um 90° entfernt ist, heißt Horizont. Ein größter Kreis PANB durch den Pol und das Zenith senkrecht auf den Horizont gelegt, steht auch senkrecht auf dem Aequator, und heißt Meridian (Mittagsebene). Der nördliche Durchschnittspunkt des Horizonts mit der Meridianebene heißt Nordpunkt oder Nord, der entgegengesetzte aber Südpunkt oder Süd. 90° von beiden

Punkten entfernt liegen Ost und West. Der Meridianbogen FP, der die Erhebung des Poles über den Horizont mißt, heißt Polhöhe, und da FP + PZ = 90° = PZ + ZB; so ist auch FP = ZP, d. h. die Polhöhe ist gleich der Entfernung des Zenith vom Aequator, welche Entfernung ebenfalls durch einen Meridianbogen gemessen wird.

Der Bogen AF mißt den Winkel, unter welchem sich Aequator und Horizont schneiden, und da AF + FP = 90°, so ist dieser Winkel das Complement der Polhöhe. Aequator und Ekliptik schneiden sich als größte Kreise in zwei Punkten, d. h. die Sonne geht jährlich zweimal durch den Aequator, am 21. März (Frühlingsnachtgleiche) und am 23. September (Herbstnachtgleiche). Die Sonne befindet sich also vom 21. März bis 23. September nördlich vom Aequator, die übrige Zeit südlich. Zieht man vom Orte der Sonne einen Bogen senkrecht auf den Aequator, so bestimmt er die Entfernung der Sonne vom Aequator, und heißt Deklination der Sonne, welche nördlich oder südlich seyn kann. Die Entfernung der Sonne vom Punkte der Frühlingsnachtgleiche, von Westen gegen Osten gezählt, heißt Länge der Sonne. Die Sonne verweilt in der nördlichen Halbkugel (vom 21. März bis 23. Sept.) 186 Tage; in der südlichen 179 Tage. Man kann daher annehmen, daß die Sonne bei nördlicher Deklination täglich 0,967°, bei südlicher 1,005° zurücklege, welche Annahme ziemlich genaue Resultate liefert.

Nur jene Sterne, deren Lauf genau in den Aequator fällt, gehen im wahren Ostpunkte auf, und im Westpunkte unter; die übrigen Sterne werden mehr oder weniger Grade entfernt von jenen Punkten, auf und untergehen. Die Sonne kann daher blos zur Zeit der Aequinoktien im wahren Ostpunkte aufgehen; im Frühling und Sommer ist die Abweichung ihres Aufganges vom Ostpunkte nördlich, nörd-

liche Aufgangsweite, im Herbste und Winter südlich, südliche Aufgangsweite.

Diese Aufgangsweite ist immer ein Bogen des Horizonts, eingeschlossen zwischen den Durchschnittspunkten desselben mit dem Aequator und der Ekliptik, also MQ (Fig. 25).

Nimmt man (Fig. 25) den Ort der Sonne in Q, und legt durch diesen Ort den Meridian PQp, so ist Qx die Deklination der Sonne; das Stück xM des Aequators, zwischen dem Meridian der Sonne und dem Horizonte = Mx ist das Complement des halben Tagbogens; woraus also für einen gegebenen Ort nach bekannter Deklination der Sonne der halbe Tagbogen, und dadurch die Länge des Tages (also auch der Nacht) gefunden werden kann.

Die geographische Lage eines Ortes auf der Oberfläche der Erde wird bestimmt durch dessen Entfernung vom Aequator (Polhöhe, Breite), die entweder nördlich oder südlich seyn kann, (nördliche, südliche Breite); und durch die Entfernung von einem Meridian, den man als ersten annimmt, gegen Osten.

Wir werden bei den nachfolgenden Berechnungen immer jenen Meridian als ersten annehmen, der 20° westlicher liegt, als Paris.

Aufgaben. 1. Es soll die Entfernung Münchens von Paris in einem Bogen eines größten Kreises der Erdkugel angegeben werden.

Auflösung. Zur Auflösung dieser Aufgabe ist nothwendig, die geographische Lage der beiden Städte zu wissen; nun ist aber

Länge von München	29° 14′ 45″
=	= Paris	20°
Breite von München	48° 8′ 20″
=	= Paris	48° 50′ 15″

Es sey nun (Fig. 21) H die Lage von Paris, PHR

dessen Meridian; L die Lage Münchens, dessen Meridian PLR; ist nun AOFB der Aequator; so ist:

LF = 48° 8′ 20″, mithin dessen Complement
PL = 41° 51′ 40″; eben so
HO = 48° 50′ 15″; dessen Complement
PO = 41° 9′ 45″.

Die Längendifferenz beider Städte ist

$$9^\circ\ 14'\ 45'' = OF = W.\ HPL.$$

Wir haben also ein sphärisches Dreieck HPL, in welchem zwei Seiten HP, LP und der eingeschlossene Winkel HPL gegeben sind. Gesucht wird die Seite HL, die Entfernung der genannten Orte.

Setzen wir nun PL = b; PH = c; HPL = A, so haben wir nach XVI. 3. 4.

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(B+C) = \text{cotg.}\ \tfrac{1}{2}A\ \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(b-c)}{\cos.\ \frac{1}{2}(b+c)}$$

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(B-C) = \text{cotg.}\ \tfrac{1}{2}A\ \frac{\sin.\ \frac{1}{2}(b-c)}{\sin.\ \frac{1}{2}(b+c)},\ \text{d. i.}$$

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(B+C) = \text{cotg.}\ 4^\circ\ 37'\ 22{,}5''\ \frac{\cos.\ 20'\ 57{,}5''}{\cos.\ 41^\circ\ 30'\ 42{,}5''}$$

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(B-C) = \text{cotg.}\ 4^\circ\ 37'\ 22{,}5''\ \frac{\sin.\ 20'\ 57{,}5''}{\sin.\ 41^\circ\ 30'\ 42{,}5''}.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\log.\ \text{cotg.}\ 4^\circ\ 37'\ 22{,}5'' &= 11.0922626\\
+\ \log.\ \cos.\ 20'\ 57{,}5'' &= 9.9999919\\
&\quad 21.0922545\\
-\ \log.\ \cos.\ 41^\circ\ 30'\ 42{,}5'' &= -\ 9.8743769\\
\log.\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(B+C) &= 10.2178776 =\\
&= \log.\ \text{tg.}\ 86^\circ\ 32'\ 5''.
\end{aligned}$$

Es ist ferner:

$$\begin{aligned}
\log.\ \text{cotg.}\ 4^\circ\ 37'\ 25{,}5'' &= 11.0922626\\
+\ \log.\ \sin.\ 20'\ 57{,}5'' &= 7.7850776\\
&\quad 18.8773402\\
-\ \log.\ \sin.\ 41^\circ\ 30'\ 42{,}5'' &= -\ 9.8213657\\
\log.\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(B-C) &= 9.0559745 =\\
&= \log.\ \text{tg.}\ 6^\circ\ 29'\ 23''.
\end{aligned}$$

Es ist aber $B = \frac{1}{2}(B+C) + \frac{1}{2}(B-C) = 93^\circ\ 1'\ 28''$

$C = \frac{1}{2}(B+C) - \frac{1}{2}(B-C) = 80^\circ\ 2'\ 42''$.

Um nun die Seite a zu finden, haben wir nach XIV:

$$\sin.\ a = \frac{\sin.\ c\ \sin.\ A}{\sin.\ C};$$

$$= \frac{\sin.\ 41^\circ\ 9'\ 45'' \cdot \sin.\ 9^\circ\ 14'\ 45''}{\sin.\ 80^\circ\ 2'\ 42''}.$$

Nun ist aber:

$$\begin{array}{rl} \log.\ \sin.\ 41^\circ\ 9'\ 45'' = & 9.8183558 \\ +\ \log.\ \sin.\ 9^\circ\ 14'\ 45'' = & 9.2059369 \\ \hline & 19.0242927 \\ -\ \log.\ \sin.\ 80^\circ\ 2'\ 42'' = & -\ 9.9934114 \\ \hline \log.\ \sin.\ a = & 9.0308814 = \\ \log.\ \sin.\ 6^\circ\ 9'\ 50''. & \end{array}$$

Mithin beträgt die Entfernung Münchens von Paris 6° 9′ 50″; und da 1° = 15 geographische Meilen, so ist die Entfernung 92, 45 geographische Meilen.

Anders läßt sich vorstehende Aufgabe lösen nach XVIII. 1., wo wir hatten

$$\cos.a = \frac{\cos.c}{\cos.x}\cos.\ (b - x);\ tg.\ x = tg.\ c\ \cos.\ A.$$

Hier ist $b = 41^\circ\ 9'\ 45''$

$c = 41^\circ\ 51'\ 40''$

$A = 9^\circ\ 14'\ 45''$.

Es ist also:

$$\log.\ tg.\ x = \log.\ tg.\ c + \log.\ \cos.\ A.;\ \text{nun ist:}$$

$$\begin{array}{rl} \log.\ tg.\ c = & 9.9523198 \\ +\ \log.\cos.A = & 9.9943207 \\ \hline \log.\ tg.\ x = & 19.9466405 - 10 = \\ & \log.\ tg.\ 41^\circ\ 29'\ 20''. \end{array}$$ Daher

$$\log.\cos.a = \log.\cos.41^\circ 51' 40'' + \log.\cos.19' 35'' - \log.\cos 41^\circ 29' 20''.$$

Es ist aber:

$$\log.\cos.\ 41^\circ\ 51'\ 40'' = 9.8720194$$
$$+ \log.\cos.\ 19'\ 35'' = 9.9999930$$
$$19.8720124$$
$$- \log.\cos.\ 41^\circ\ 29'\ 20'' = -9.8745307$$
$$\log.\cos.a = 9.9974817 =$$
$$\log.\cos.\ 6^\circ\ 9'\ 51'';$$

welches Resultat mit dem vorigen bis auf eine Sekunde zusammentrifft.

Um ähnliche Aufgaben lösen zu können, wird die geographische Lage mehrerer Orte hier angegeben. Die südliche Breite wird bezeichnet durch —.

Namen.	Länge.	Breite.
Alexandrien . .	47° 50′ 16″	31° 12′ 8″
Algier	20° 41′ 5″	36° 48′ 30″
Amsterdam . . .	22° 31′ 30″	52° 22′ 30″
Cadiz	11° 22′ 15″	36° 32′
Calkutta . . .	106° 9′ 30″	22° 34′ 45″
Cap	36° 3′ 45″	— 33° 55′ 15″
Constantinopel .	46° 42′ 30″	41° 1′ 34″
Hamburg	27° 30′ 31″	53° 33′ 1″
Königsberg . .	38° 0′ 42″	54° 42′ 11″
Lissabon	8° 31′	38° 42′ 20″
London	17° 34′ 13″	51° 30′ 49″
Madrid	13° 58′	40° 25′ 18″
Marseille . . .	23° 2′ 6″	43° 17′ 49″
Moskau . . .	55° 12′ 45″	55° 45′ 45″
Neapel	31° 54′ 55″	40° 51′ 46″
Peking	134° 7′ 30″	39° 54′ 13″
Petersburg . . .	47° 59′ 30″	59° 56′ 23″
Rio Janeiro . .	234° 13′ 51″	— 22° 54′ 10″
Rom	30° 9′ 15″	41° 53′ 45″
Stockholm . . .	35° 44′ 45″	59° 19′ 15″
Wien	34° 2′ 30″	48° 12′ 35″

Aufgabe 2. Man suche die Längendifferenz der beiden Städte London und München.

Auflösung. Hier wird vorausgesetzt, daß die geographische Breite beider Orte nebst ihrer Entfernung von einander gegeben ist. Nun ist die Breite von London: 51° 30′ 49″; von München: 48° 8′ 20″; die Entfernung beider Orte ist 8° 14′ 30″.

Es sey nun (Fig. 21) in H London, in L München, so hat man HP = Complement der Breite = 38° 29′ 11″; eben so LP = 41° 51′ 40″; und HL = 8° 14′ 30″; gesucht wird Winkel HPL. Setzen wir HP = c, LP = b, HL = a, so ist nach XI. 2.

$$\sin.\tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b-c)\sin.\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin.b \sin.c}}.$$

Nun ist $\sin.\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \sin.\ 5^\circ\ 48'\ 29{,}5''$
$\sin.\tfrac{1}{2}(a+c-b) = \sin.\ 2^\circ\ 26'\ 0{,}5''$.

Es ist also:

$$\begin{array}{lr} \log.\sin.\ 5^\circ\ 48'\ 29{,}5'' = & 9.0051745 \\ +\ \log.\sin.\ 2^\circ\ 26'\ 0{,}5'' = & 8.6279732 \\ \hline & 17.6331477 \\ -\ \log.\sin.\ 41^\circ\ 51'\ 40'' = & -\ 9.8243388 \\ -\ \log.\sin.\ 38^\circ\ 29'\ 11'' = & -\ 9.7940198 \\ & -\ 19.6183586 \end{array}$$

$$\log.\sin.\tfrac{1}{2}A = \frac{17.6331477 - 19.6183586}{2} = \frac{0.0147891 - 2}{2} =$$

0.0073945 — 1; und nach dem Radius der Tafeln: $\log.\sin.\tfrac{1}{2} A = 9.0073945 = \log.\sin.\ 5^\circ\ 50'\ 16''$; daher die Längendifferenz zwischen London und München = A = 11° 40′ 32″.

Aufgabe 3. Es soll für einen gegebenen Tag die Deklination der Sonne gefunden werden.

Auflösung. Hier ist zu wissen nothwendig die Länge der Sonne, d. i. wie weit sie bereits in der Ekliptik vom

Frühlings-Aequinoktialpunkte entfernt ist. Soll z. B. die Deklination der Sonne für den 27. Mai gesucht werden, so sind bis zu diesem Tage seit den 21. März 67 Tage verflossen, oder die Sonne ist 67 × 0,967 Grade vom genannten Aequinoktialpunkte entfernt.

Ist nun (Fig. 25) AB der Aequator, DE die Ekliptik, der Orte der Sonne Q, so ist LQ die Länge der Sonne = 64° 47′; Qx die Deklination, die gesucht wird in dem bei x rechtwinklichen Kugeldreiecke LQx, wo außer der Hypotenuse LQ der Winkel L als Schiefe der Ekliptik = 23° 27′ 33″ gegeben ist.

Hier haben wir nach XXIV.

$$\sin. b = \sin. H . \sin. B \text{ oder}$$

$$\sin. Qx = \sin. LQ . \sin. L$$

$$= \sin. 64^\circ 47' \sin. 23^\circ 27' 33''; \text{ daher}$$

$$\log. \sin. Qx = 9.9565061$$
$$+ 9.5999871$$

$$19.5564932 - 10 =$$

$\log. \sin. 21^\circ 7'$.

Also beträgt die Deklination der Sonne am genannten Tage 21° 7′, und zwar nördlich. Wird die Länge der Sonne 90°, so ist die Deklination gleich der Schiefe der Ekliptik, und die Sonne steht im Wendekreise; ist die Länge 180°, so ist die Deklination 0, und die Sonne steht im Aequator ꝛc. . .

Weiß man in einer gegebenen Jahreszeit die Deklination der Sonne, so läßt sich daraus auch berechnen, wie weit sie bereits in der Ekliptik vorgerückt ist.

Aufgabe 4. Es soll für einen gegebenen Ort, z. B. München, die größte Aufgangsweite gesucht werden.

Auflösung. Die Polhöhe von München ist 48° 8′ 20″; nun ist im Dreiecke LMQ die gesuchte Aufgangsweite MQ; gegeben ist der Winkel L = 23° 27′ 33″; der Winkel

LMQ, der mit seinem Nebenwinkel BMQ gleichen Sinus hat; BMQ aber = dem Complement der Polhöhe = 41° 51′ 40″, und die Länge der Sonne LQ, die bei der größten Aufgangsweite 90° ist.

Hier haben wir nach XIV.

sin. L : sin. M = sin. MQ : sin. LQ; d. i.

sin. 23° 27′ 33″ : sin. 41° 51′ 40″ = sin. MQ : 1; daher log. sin. MQ = log. sin. 23° 27′ 33″ — log. sin. 41° 51′ 40″.

Nun ist log. sin. 23° 27′ 33″ = 9.5999871 + 10
— log. sin. 41° 51′ 40″ = — 9.8242448

9.7757423 = log. sin. 36° 37′ 57″.

Die Sonne geht also für München und jene Orte, die gleiche Breite haben, am längsten Tage 36° 37′ 57″ nördlich vom wahren Ostpunkte auf; am kürzesten Tage weicht sie eben so weit südwärts ab, so daß für genannte Orte die ganze Weite des Sonnenaufgangs 73° 15′ 54″ beträgt.

Soll die Aufgangsweite für den längsten Tag 90° betragen, so ist in der eben aufgestellten Proportion das dritte Glied dem vierten gleich; also auch das erste dem zweiten, d. i. das Complement der Polhöhe ist gleich der Schiefe der Ekliptik, die Polhöhe für den nördlichen Polarkreis.

Nehmen wir für den 27. Mai die Länge der Sonne 64° 47′, so läßt sich auch für diesen Tag die Aufgangsweite für München bestimmen; dann hat man:

sin. 23° 27′ 33″ : sin. 41° 51′ 40″ = sin. MQ : sin. 64° 47′.

Nun ist: log. sin. 23° 27′ 33″ = 9.5999871
+ log. sin. 64° 47′ = + 9.9565061

19.5564932
— log. sin. 41° 51′ 40″ = — 9.8242448

9.7332484 = log. sin. 32° 40′ nahezu;

also für den 27. Mai die Aufgangsweite 32° 40′.

Aufgabe 5. Man soll für München die Dauer des kürzesten Tages berechnen.

Auflösung. Nach früher angenommenen Bezeichnung ist (Fig. 25) Mx das Complement des halben Tagbogens; dieses Stück Mx wird nun berechnet im rechtwinklichen Dreiecke MxQ, wo M das Complement der Polhöhe, Qx die Deklination der Sonne ist. Nun haben wir nach XXVI:

$$\sin. c = \frac{\text{cotg. } B}{\text{cotg. } b}; \text{ d. i.}$$

$$\sin. Mx = \frac{\text{cotg. } M}{\text{cotg. } Qx} = \frac{\text{cotg. } 41^\circ\, 51'\, 40''}{\text{cotg. } 23^\circ\, 27'\, 33''}.$$

Nun ist log. cotg. 41° 51′ 40″ = 10.0476802 + 10
— log. cotg. 23° 27′ 33″ = — 10.3621992

9.6854810 =

log. sin. 28° 59′ 36″, also der Bogen Mx = 28° 59′ 36″; mithin sein Complement 61° 0′ 24″, welches der halbe Tagbogen ist; daher der ganze Tagbogen 122° 0′ 48″; diesen Bogen in Stunden ausgedrückt, haben wir

360° : 122° 48″ = 24 : x; woraus

x = 8 Stunden 7′ 48″ als die Länge des kürzesten Tages sich für München und jene Orte ergibt, die mit München gleiche Breite haben.

Setzen wir den halben Tagbogen = q, die Deklination der Sonne = d, die Polhöhe = p, so ist Mx = 90° — q; M = 90° — p; daher sin. Mx = cotg. M tg Qx XXIV sich verwandelt in sin. (90° — q) = cotg. (90° — p) tg. d, oder cos. q = tg. p . tg. d.

Es wurde in dem eben berechneten Beispiele die Deklination der Sonne südlich, und als solche positiv genommen; daher wird dann die nördliche Deklination negativ; oder für die nördliche Halbkugel hat man dann:

cos. q = — tg. b tg. d, d. h. q wird dann größer als 90°.

Ist die Deklination (d) der Sonne = 0, d. h. steht die Sonne im Aequator, so wird $\cos. q = 0$; also $q = 90°$; daher der ganze Tagbogen 180°; mithin der Nachtbogen 180°, und Tag und Nacht gleich. Auf ähnliche Weise würden wir für München den längsten Tag 15 Stunden 52′ 12″ finden.

Wir haben oben für den 27. Mai die Deklination der Sonne (beiläufig) 21° 7′ gefunden; wie lang ist dieser Tag?

Hier haben wir $\cos. q = - \text{tg}. 48° 8' 20'' . \text{tg}. 21° 7'$.

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } \log.\ \text{tg}.\ 48° 8' 20'' &= 10.0476802 \\ \log.\ \text{tg}.\ 21° 7' &= 9.5868147 \\ \hline & 19.6344949 - 10. \end{aligned}$$

Diesem Logarithmus entspricht der Winkel 115° 31′ 57″; das doppelte also: 231° 3′ 54″, welcher Bogen in Zeit ausgedrückt 15 Stunden 25′ 24″ gibt.

Nun soll noch der längste Tag für Petersburg berechnet werden. Petersburg liegt unter 59° 57′ 23″ nördlicher Breite; daher $\cos. q = - \text{tg}. 59° 56' 23'' . \text{tg}. 23° 27' 33''$.

$$\begin{aligned} \text{Nun ist: } \log.\ \text{tg}.\ 59° 56' 23'' &= 10.2375061 \\ \log.\ \text{tg}.\ 23° 27' 33'' &= 9.6374560 \\ \hline & 19.8749621 - 10. \end{aligned}$$

Diesem Logarithmus entspricht der Winkel 138° 34′ 32″; also der ganze Tagbogen für Petersburg 277° 9′ 4″, welcher Bogen in Zeit ausgedrückt 18 Stunden 28′ 33″ gibt.

Aufgabe 6. Wie viel Grade der Breite erstreckt sich das erste, zweite rc.. Klima?

Auflösung. Das erste Klima beginnt bekanntlich vom Aequator, und reicht bis zu jenem Parallelkreis, auf welchem der längste Tag 12 St. 30′ ist. Wenn wir daher in der Formel $\cos. q = - \text{tg}. p\ \text{tg}. d$ die angenommene Bezeichnung gelten lassen, so haben wir durch einfache Uebersetzung:

$tg. p = - \frac{cos. q}{tg. d}$, wo p nördlich oder südlich ist, je nachdem d nördlich oder südlich ist.

Nun bestimme man 12 St. 30′ durch einen Bogen: d. i.

$$24 : 12\frac{1}{2} = 360^\circ : x;$$ woraus

$$x = 187^\circ\ 30'; \text{ daher } q = \frac{x}{2} = 93^\circ\ 45'.$$

Daher $tg. p = - \frac{cos.\ 93^\circ\ 45'}{tg.\ 23^\circ\ 27'\ 33''}$.

Nun ist $log.\ cos.\ 93^\circ\ 45' = 8.8155985 + 10$

$- log.\ tg.\ 23^\circ\ 27'\ 33'' = - 9.6374560$

$9.1781425.$

Diesem Logarithmus entspricht ein Winkel von 8° 34′ 14″; mithin erstreckt sich das erste Klima vom Aequator bis zur Breite 8° 34′ 14″ nördlich sowohl als südlich; auf ähnliche Art könnte das zweite, dritte ꝛc. berechnet werden.

Es läßt sich also auch die Breite eines Ortes finden, wenn bei gegebener Deklination die Tag- oder Nachtlänge bekannt ist.

Aufgabe 7. Die Größe eines Parallelkreises auf der Erdoberfläche nach bestimmter Breite angeben.

Auflösung. Wenn (Fig. 17) AK den Aequator vorstellt, und B der Punkt ist, für welchen die Größe des Parallelkreises gemessen werden soll, so ist AB = ACB offenbar die Polhöhe des Punktes B; der Halbmesser der Erde ist AC, der Halbmesser des Parallelkreises ist BP. Man hat also BC : BP = 1 : cos. ACB. Nun verhalten sich aber die Peripherien zweier Kreise wie ihre Radien, und bezeichnen wir die Polhöhe durch b, den Aequator durch A, Parallelkreis durch P, so ist

$$A : P = 1 : cos.\ b;$$ daher

$$P = A\ cos.\ b.$$

Wollen wir nun den Parallelkreis unter 48° 8′ berechnen, so haben wir:

$$\log. P = \log. 5400 + \log. \cos. 48^\circ\ 8'$$
$$= 3.7323938$$
$$+ 9.8243858 - 10$$
$$3.5567796 = \log. 3603{,}95.$$

Also der ganze Parallelkreis unter 48° 8′ enthält 3603,95 geographische Meilen; daher 1 Grad $= \frac{3603{,}95}{360} = 10{,}011$ Meilen, und 1 Sekunde = 0,0027808 Meilen = 70,5 bayerische Fuß nahezu.

Aufgabe 8. Es soll die Fläche desjenigen Stückes der Erdoberfläche berechnet werden, welches eingeschlossen ist durch 3 Bogen größter Kreise, die durch Paris, München und den Nordpol gelegt werden.

Auflösung. Aus Aufgabe 1 wissen wir, daß im genannten Dreiecke der Winkel am Pole = 9° 14′ 45″; der Winkel bei Paris = 93° 1′ 28″; der Winkel bei München = 80° 2′ 42″ betrage. Es ist daher die Summe aller Winkel dieses sphärischen Dreiecks = 182° 18′ 55″. Daher dieses Dreieckes Exzeß = 2° 18′ 55″ = 8335″.

Man hat aber aus §. 66.

$$\log. \Delta = 0.5540667 + \log. 8335$$
$$= 0.5540667 + 3.9209056 =$$
$$= 4.4749723 = \log. 29851{,}93.$$

Diese Fläche enthält also nahezu 29852 geographische Quadratmeilen.

XIV. Fläche des regulären Vielecks.

Durch Trigonometrie läßt sich aus der Seite eines regulären Vielecks dessen Fläche folgendermaßen finden.

Es sey (Fig. 18) DB die Hälfte der Seite eines regulären n Eckes, und AC der Radius des um das Vieleck beschriebenen Kreises, so ist des Vielecks Centriwinkel $= \frac{360}{n}$; daher der halbe Centriwinkel ACD $= \frac{180}{n}$. Durch Radien, die man an die Winkelpunkte zieht, entstehen n

congruente Dreiecke, und heißt die Seite des Vielecks = a, so ist ein $\triangle = \frac{a \cdot BC}{2}$; daher Polygon $= \frac{n \cdot a \cdot BC}{2}$. Es ist aber BC : DB = 1 : tg. BCD; d. i.

$$BC : \tfrac{1}{2} a = 1 : tg. \frac{180}{n}, \text{ also}$$

$$BC = \frac{a}{2\, tg. \frac{180}{n}}; \text{ daher}$$

$$\triangle = \frac{a^2}{4\, tg. \frac{180}{n}}, \text{ und}$$

$$Polyg. = \frac{a^2 n}{4\, tg. \frac{180}{n}} = \tfrac{1}{4} a^2 n \, cotg. \frac{180}{n}.$$

Daraus hat man: $a = 2 \sqrt{\frac{Polyg.\ tg. \frac{180}{n}}{n}}$.

Es sey die Seite eines regulären 10Eckes 8 Fuß; wie groß ist dessen Fläche?

Hier haben wir mit Anwendung der eben aufgestellten Formel:

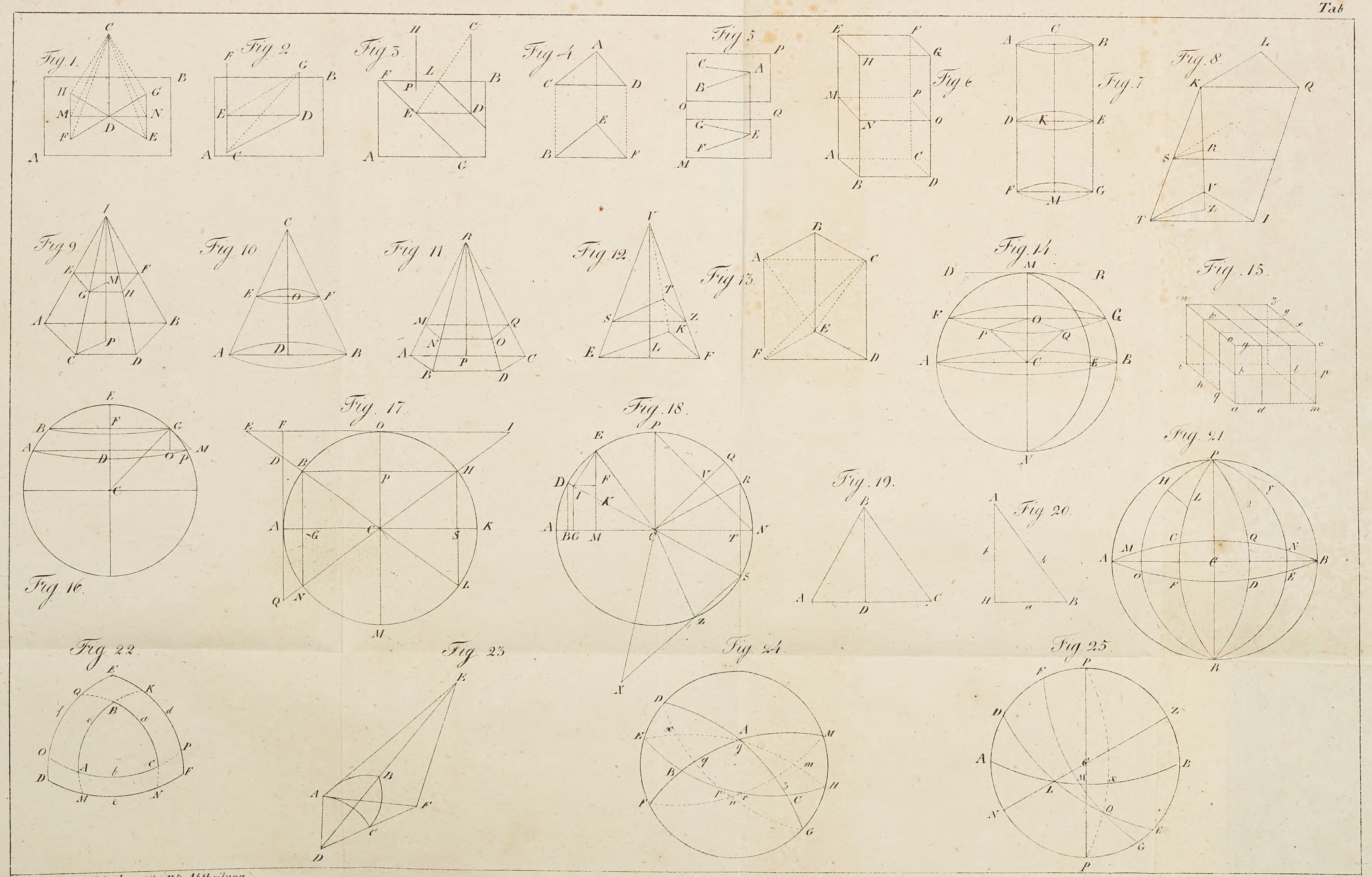
log. Polyg. = 2 log. 8 + log. 10 + log. cotg. 18° — log. 4.

Nun ist: 2 log. 8 = 1.8061800
+ log. 10 = 1.
+ log. cotg. 18° = 10.4882240 — 10

3.2944040
— log. 4 = — 0.6020600

2.6923440 = log. 492,43.

Das Polygon enthält also 492,43 □Fuß.



Zu Mayer's Mathematik IIte Abtheilung

1 fl 3 kr
M. Schwarz

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Mayer, Georg

Leitfaden zum Unterrichte in der elementaren Mathematik für seine Schüler entworfen

Bd.: 2

München 1831

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.38-a
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739723-8